Рассеяние фермионов на Монополе

$\boxed{S\text{-волновые} \leftrightarrow J=0}$ $\Longrightarrow$ Несохранение фермионных чисел

(Callan 1982, Rubakov 1981)

Во многих моделях следствием является

$$\boxed{p + M \mapsto e^+ + M} \leftrightarrow$$ Монопольный катализ распада протона.

Будем использовать модель с $h=0$

(Безмассовые фермионы, юкавское в-е выключено).

Уравнения для L и R-компонент фермионов расцепляются.

Будем писать только L-ур-ние.

$$\boxed{i\frac{d\bar{\chi}}{dx^0} = i\tau^a\partial_a\chi - \frac{g}{2}A^a_i\tau^i\bar{\chi}\tau^a}$$

$$\boxed{\bar{\chi} = \bar{\chi}_{\alpha a}}$$

Изотопический индекс

Фермионный индекс

Заинтересуемся эл-ми при $r \to \infty$

$$\boxed{A^a_i = \frac{1}{gr}\varepsilon^{aij}n^j}$$

Во-первых, при $h=0$ нормируемой фермионной моды нет

$$u \sim \exp\{-m_F r\}\frac{1}{r}, \quad m_F = 0 \Longrightarrow \boxed{u \sim 1/r}$$

Ненормируемая мода!

Связанных состояний & дробления заряда нет!

Рассмотрим фермиона с $I = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{\tilde{\Psi} = \chi_0(r)\cdot 1 + \chi_1(r)\, n^a \tau^a}$$

Важным объектом является заряд фермиона.

По отношению к группе электромагнетизма

Ненарушенной группы на ∞

В унитарной калибровке это $\boxed{\omega = e^{i\alpha\frac{\tau^3}{2}}}$

Покажем, что в регулярной калибровке при $r \to \infty$

$$\boxed{\omega = e^{i\alpha^{\bullet}(r)\frac{\tau^a}{2} n^a}}$$

Действительно, поле:

$$\boxed{\Phi^a = v n^a}$$

$$\boxed{\Phi = -i v n^a \frac{\tau^a}{2}} \leftrightarrow$$ Вакуум inv. относительно такого преобразования.

$$\omega \Phi \omega^{-1} = \phi \quad \text{ok}$$

Генератор этих остаточных преобразований будем называть опер-ром заряда,

$$\boxed{Q = \frac{g}{2} n^a \tau^a}$$

Его собств. значения $\pm g/2$.

Покажем, что фермионы $\underbrace{}_{\boxed{\text{на } \infty}}$ имеют заряды $\pm g/2$.

Смысл понятен: Вдали от монополя при низких энергиях:

$$A_\mu = A_\mu^{(M)} + (-ig)\frac{1}{2}\tau^a n^a B_\mu$$

Э/м. поле

$$\boxed{i\gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu^{(M)} + (-i\hat{Q})B_\mu)\Psi = 0.}$$

Если мы локально перейдём к собственным векторам опер-ра $\hat{Q}$, то получим $\Psi' = U\Psi$

унитарное вращение

$$\boxed{\hat{Q}' = \begin{pmatrix} g/2 & 0 \\ 0 & -g/2 \end{pmatrix}.}$$

Локально ур-ние Дирака будет выглядеть как ур-ние для 2-х фермионов с ~~????~~ зарядами ($\pm g/2$).

$\boxed{H_0}$ Q - эл. заряд $\Leftrightarrow$ Ненарушенный генератор

$\Downarrow$

$\hat{Q}$ сохраняется вдали от Монополя.

$\Downarrow$

$$\boxed{[\hat{Q}, H_D] = 0}$$

$\Downarrow$

Собственно энергетические состояния характеризуются 2-мя квантовыми числами

$$\boxed{J \quad Q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &[J, H_D] = 0 \\ &[Q, H_D] = 0 \end{aligned}} \longleftrightarrow \text{ при } r \mapsto \infty$$

$[S_i, Q] = 0$

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, Q\right] = \left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_a n_a}{2} g\right] = \frac{i\varepsilon_{iak}}{2} \tau_k g\, n_a$$

$$[L_i, Q] = \left[-i\varepsilon_{ijk} x_j \partial_k, \frac{\tau_a n_a}{2} g\right] =$$

$$= -i\varepsilon_{ija} \frac{x_j}{r} \frac{\tau_a}{2} g (\delta_{ak} - n_a n_k)$$

n_j

$$= -i\varepsilon_{ija} n_j \frac{\tau_a}{2} g$$

$\Rightarrow$ Сокращаются

Задача. Проверить явно, что

$$\boxed{\begin{aligned} &[J_i, Q] = 0 \\ &[H_D, Q] = 0 \end{aligned}} \longleftrightarrow$$ ~~прямо~~ На асимптотике

Решение:

$$i\gamma^0(\partial_0 + A_0)\Psi + i\gamma^i(\partial_i + A_i)\Psi = 0$$

$$i\partial_0\Psi = -iA_0\Psi - i\alpha^i(\partial_i + A_i)\Psi.$$

$$\boxed{H_D = -iA_0 - i\alpha^i(\partial_i + A_i)}$$

$$H_D = -i\alpha^i(\partial_i) - i\alpha^i(+ig)\frac{1}{gr}\varepsilon^{aij}n^j\frac{\tau^a}{2}.$$

$$[H_D, Q] = -i\frac{\alpha^i}{r}(\delta_{ia} - n_i n_a)\frac{\tau^a}{2}g -$$

$$-i\frac{\alpha^i}{r}\varepsilon^{aij}n^j\frac{1}{2}g\frac{1}{i}\varepsilon_{abk}\tau^k n^b.$$

$$\delta_{ib}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jb}$$

$$= -i\frac{\alpha^i}{r}g\left[\cancel{(\delta_{ia} - n_i n_a)\frac{\tau^a}{2} + \frac{1}{2}(n_i n_j\tau_j - \tau_i)}\right]$$

$$= 0.$$

~~[illegible]~~

Итак, Давайте найдём конфигурации

с $J = 0$

и $Q = \pm g/2$.

$J = 0$: $\boxed{\bar{X} = X_0(r)\,1 + X_1(r)\left(\tau^a n^a\right)}$

~~[illegible]~~ $\boxed{Q = +g/2}$

$$Q\bar{X} = -\bar{X}\tau^b\frac{n^b}{2}g = g/2\,\bar{X}$$

$$-X_0 \frac{\tau^b n^b}{r}\cancel{\varphi} - X_1 \cancel{\tfrac{\varphi}{2}} = \cancel{\tfrac{\varphi}{2}} X_0 + \cancel{\tfrac{\varphi}{2}} X_1 (\tau^b n^b)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X_0 = -X_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{X}\Big|_{\varphi=+1} = (1-\tau^a n^a)\, U_+$$

$$\bar{X}\Big|_{\varphi=-1} = (1+\tau^a n^a)\, U_-$$

2 независимых уровня вырожденных по энергии

$$\boxed{\bar{X} = \bar{X}_+ + \bar{X}_-}$$

~~Переменные должны разделиться:~~

~~$V_{ak}, \chi_{ak}, \varphi$~~

$$-i(\tau^a n_a + 1)\, U_+'$$

$$i(1-\tau^a n^a)\frac{dU_+}{dt} = i\tau^a\left[1 - \frac{\tau^b}{r} n^b\right] U_+' n_a +$$

$$+ i\cancel{\tau^a}\left(-\frac{\cancel{\tau^b}}{r}\right)(\cancel{\delta_{ab}} - \cancel{n_a n_b})\, U_+ - \quad \to \quad -\frac{2i}{r}U_+$$

$$-\frac{i}{2}\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^i \tau^a U_+$$

$$(1-\tau^b n^b)$$

$$+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}r}\cancel{\varepsilon^{aik}} n^k \cancel{i\varepsilon^{aid}\tau^a} U_+ \tau^d \quad \to \quad \frac{i}{r}\tau^k n^k U_+$$

$$+\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^i \cancel{\tau^b \tau^a} n^b U_+$$

$$-\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^i\, i\varepsilon^{abc}\tau^c n^b U_+$$

$$\delta_{ib}\delta_{kc} - \delta_{ic}\delta_{kb}$$

$$\cancel{-\frac{i}{2r} n^c \tau^b \tau^c n^b U_+} +$$

$$\cancel{+\frac{i}{2r} n^b \tau^c \tau^c n^b U_+}$$

$$i\cancel{(1-\tau^a n^a)}\frac{dU_+}{dt} = -i\cancel{(1-\tau^a n^a)}U_+' -$$

$$-\frac{i}{r}U_+\cancel{(1-\tau^a n^a)}$$

$$\boxed{\frac{dU_+}{dt} = -U_+' - \frac{1}{r}U_+}$$

$$i(1+\tau^a n^a)\dot{U}_- =$$

$$= i\tau^a(1+\tau^b n^b)U_-' n^a + i\frac{\cancel{\tau^a \tau^b}}{r}\cancel{(\delta_{ab} - n_a n_b)}U_-$$

$$-\frac{i}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^i (1+\tau^c n^c) U_- \tau^a$$

$$+\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \cancel{\tau^i \tau^a} U_- i\varepsilon^{ai b}\tau^b \to \frac{i}{r} n^k \tau^k U_-$$

$$\cancel{-\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^l n^a \delta^{al} U_-} \to 0$$

$$+\frac{1}{2r}\varepsilon^{aik} n^k \tau^i i\varepsilon^{acb}\tau^b n^c U_-$$

$$\delta_{ic}\delta_{kb} - \delta_{ib}\delta_{kc}$$

$$\cancel{\frac{1}{2r} n^k \tau^c \tau^k n^c u_-}$$

$$\cancel{-\frac{3}{4r} n^k \tau^e \tau^e n^k u_-}$$

$$= i\left(1+\tau^e n^e\right) u_-' + \frac{i}{r} u_-\left(1+n^k \tau^k\right)$$

$$\boxed{\dot{u}_- = u_-' + \frac{1}{r} u_-}$$

V

$$\boxed{u_+(r,t) = \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r}}$$

$$\cancel{i\omega u_+} = -\cancel{\frac{1}{r^2} e^{i\omega(t-r)}} \cancel{+ i\omega u_+} - \cancel{\frac{1}{r} u_+}$$

$$\boxed{u_-(r,t) = \frac{e^{i\omega(t+r)}}{r}}$$

$$\cancel{i\omega u_-} = -\cancel{\frac{1}{r} u_-} + \cancel{i\omega u_-} + \cancel{\frac{1}{r} u_-} \quad ok$$

VI

Нельзя поставить задачу рассеяния для u_+ и u_-

u_+ – только расходящаяся волна
u_- – только сходящаяся волна

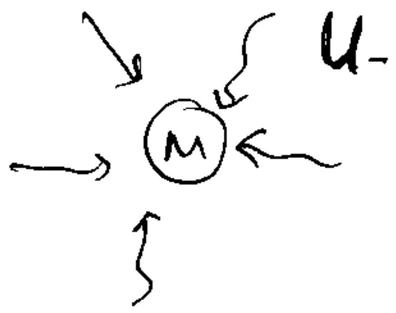
VII

~~UUAAAAAR~~

Падение на центр $P = 1$ достижения центра монополя для u_-

V

Явление UV/IR: даже если R_M мал, ВФ ч-у чувствуют структуру ядра монополя.



Конечное состояние?

Предположим, что в конечном состоянии - тоже 1 фермион.

$Q_f = +1$, т.к. $Q_f = -1$ был не может.

Если включено только одно поколение фермионов χ, то фермион с $Q = -1$ переходит в фермион с $Q = 1$

Задача Написать Уравнения для U_+ и U_- вблизи центра монополя, подставив

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_+ + \tilde{\chi}_- \text{ в Ур-ние Дирака.}$$

Задача 8 из параграфа 3.2.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{U}_+ &= -\left(U_+' + \frac{1}{r} U_+\right) - \frac{1}{r} F U_- \\ \dot{U}_- &= U_-' + \frac{1}{r} U_- + \frac{1}{r} F U_+ \end{aligned}}$$

VI

Если вы поставите задачу рассеяния, то вблизи монополя будет пр-сс рассеяния

$$\boxed{U_+ \mapsto U_-}$$

М.П.

Если закон сохранения эл. заряда выполнен,

то Монополь должен перейти в Дион с зарядом. $(-g)$

$$\boxed{u_- + M \leftrightarrow u_+ + D}$$

~~...~~ Масса Диона больше, чем масса монополя на m_V

$\Downarrow$

При низких энергиях такой процесс невозможен

$\Downarrow$

Приходится искать отриц./заряженные фермионы или антифермионы, описываемые решениями в виде расходящихся волн.

$\Downarrow$

Отрицательно / заряженный антифермион – – античастица к u_+

$\Downarrow$

Требуется нарушение з-на сохранения фермионного числа

~~...~~