4D Неабелевы теории $\quad H_D(\tau)$

N_+ – Число мод, пересекших нуль снизу

N_- – сверху

$$\boxed{\Delta N_F = N_+ - N_-}$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = H_D(\tau)\,\Psi$$

← Медленно зависит от τ

$$\boxed{\Psi = e^{-\int \omega(\tau)d\tau}\,\Psi_\omega(\tau)}$$

$$\boxed{H_D(\tau)\Psi_\omega(\tau) = \omega(\tau)\,\Psi_\omega(\tau)}$$

ω пересекает нуль снизу $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\omega = \omega_i < 0 \\ \omega = \omega_f > 0\end{array}}$ $\quad \Psi_i \propto e^{+|\omega_i|\tau}$, $\quad \Psi_f \propto e^{-\omega_f \tau}$

$\Downarrow$

Решение локализовано в пр-ве

$$\boxed{D = \frac{d}{d\tau} + H_D} \qquad \boxed{D\Psi_0 = 0}$$

Евклидова нулевая мода

$$\boxed{N_+ = N_0(D)}$$

$$\boxed{D^+ = -\frac{\partial}{\partial \tau} + H_D} \qquad \boxed{N_- = N_0(D^+)}$$

$$\boxed{\langle \Psi | \Psi' \rangle = \int d\vec{x}\,dt\; \Psi^+(\tau, x)\,\Psi'(\tau, x)}$$

$$\boxed{D^+ = (D)^+}$$

$$\boxed{\Delta N_F = N_0(D) - N_0(D^+)}$$

DD^+

D^+D

$$D\Psi_0 = 0 \Rightarrow D^+D\Psi_0 = 0$$

$$(\Psi_0, D^+D\Psi_0) = \underline{\|D\Psi_0\|^2} = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta N_F = N_0(D^+D) - N_0(DD^+)}$$

← Индекс оператора D^+D

Ненулевые собств. значения DD^+ и D^+D совпадают

$$D^+ D \Psi_\lambda = \lambda \Psi_\lambda$$

$\boxed{\tilde{\Psi}_\lambda = D\Psi_\lambda}$ $\Rightarrow$ Собств ф-ция опер-ра $\boxed{DD^+}$

$$\Psi_\lambda = \lambda^{-1} D^+ \tilde{\Psi}_\lambda = \lambda^{-1} D^+ D \Psi_\lambda = \Psi_\lambda \quad \text{ok}$$

$\Downarrow$

Обратное $\leftrightarrow$ [Вз/одн. соответств. между всеми собств. значениями.

Гладко изменяем опер-р D^+D $\Rightarrow$ $\lambda_1 \mapsto 0$

но у DD^+ $\lambda_1 \mapsto 0$ тоже $\Rightarrow$ $N_0(D^+D) - N_0(DD^+) = \text{const}$

Топологический инвариант.

Достаточно вычислить ΔN_F в каком-то поле с заданным топ-числом.

Инстантон

$$\begin{bmatrix} \Delta N_L = n(\Pi_f) - n(\Pi_i) = \Delta n \\ \Delta N_R = -\Delta N_L \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_L &= \frac{\partial}{\partial \tau} + H_L \\ D_L^+ &= -\frac{\partial}{\partial \tau} + H_L \end{aligned}}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_i &\mapsto 0, & \tau &\mapsto -\infty \\ A_i &\mapsto \Pi_f \partial_i(\Pi_f^{-1}), & \tau &\mapsto +\infty \end{aligned}}$$

$$-i\,\bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi = 0.$$

$$-i\,\partial_0 \chi + i\sigma^i D_i \chi = 0$$

$$\boxed{H_L = i\sigma^i D_i} \qquad \boxed{D_R = \frac{\partial}{\partial \tau} + H_R}$$

$$\boxed{H_R = -i\sigma^i D_i}$$

$$\boxed{D_R = -D_L^+} \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} - i\sigma^i D_i = -\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + i\sigma^i D_i\right)$$

$$N_0(D_R) = N_0(D_L^+)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta N_L = -\Delta N_R}$$

$$\begin{cases} D_L X_0 = \left(\dfrac{\partial}{\partial \tau} + i\sigma^i D_i\right) X_0 = 0 \\ -D_L^+ \eta_0 = \left(\dfrac{\partial}{\partial \tau} - i\sigma^i D_i\right)\eta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + A_0'\right) X_0' + i\sigma^i(\partial_i + A_i') X_0' = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_0' &= \omega \partial_\tau \omega^{-1} \\ A_i' &= \omega A_i \omega^{-1} + \omega \partial_i \omega^{-1} \\ X_0' &= \omega X_0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_E^\mu &= (1, -i\sigma^\mu) \\ \sigma_E^{\mu +} &= (1, i\sigma^\mu) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D_L X_0 &= \sigma_E^{\mu +} D_\mu X_0 = 0 \\ -D_L^+ \eta_0 &= \sigma_E^\mu D_\mu \eta_0 = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\Delta n = Q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \; tr(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})}$$

$$\boxed{N_0(D_L) - N_0(D_L^+) = Q}$$

$\boxed{D_R \text{ не имеет нулевых мод в поле Инстантона}}$

$$D_R^+ = (-D_L^+)^+ = -D_L = -\sigma_E^{\mu +} D_\mu$$

$$\boxed{D_R^+ D_R \eta_0 = -\sigma_E^{\mu +}\sigma_E^{\nu} D_\mu D_\nu \eta_0 = 0}$$

$$\boxed{\sigma_E^{\mu +}\sigma_E^{\nu} = \delta^{\mu\nu} + i\bar\eta_{\mu\nu a}\sigma_a}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar\eta_{0ia} &= -\bar\eta_{i0a} = -\delta_{ia}\\ \bar\eta_{ija} &= \varepsilon_{ija}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\eta_{0ia} &= -\eta_{0ia} = \delta_{ia}\\ \eta_{ija} &= \varepsilon_{ija}\end{aligned}}$$

$$D_R^+ D_R = -D_\mu D_\mu - 2i\bar\eta_{\mu\nu a}\sigma^a \underbrace{[D_\mu, D_\nu]}_{F_{\mu\nu}}$$

$\xrightarrow{\text{Инстантон}}$ $F_{\mu\nu} \propto \underline{\eta_{\mu\nu a}\tau_a}$ $\qquad \boxed{\bar\eta_{\mu\nu a}\eta_{\mu\nu b} = 0}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D_R^+ D_R = -D_\mu D_\mu} \leftarrow \text{Положительно определённый оператор}$$

$$D_\mu^2 \Psi_0 = 0 \qquad \Psi_1 + a\Psi_0$$

$$D^2\Psi_1 = \underset{>0}{\lambda}\Psi_1$$

$$-\int \psi^+ D_\mu D_\mu\psi = +\int (D_\mu\psi)^+ D_\mu\psi = \|D_\mu\psi\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$D_\mu\psi = 0 \qquad \boxed{\partial_\mu\Psi + A_\mu\Psi = 0}$$

$$\boxed{\sigma_\mu^+\partial_\mu \bar X_0 - \sigma_\mu^+ \tilde X_0 A_\mu = 0}$$

$$\boxed{N_0(D_L) = 1} \Rightarrow \boxed{\Delta N_L = 1}$$

$=$