Фермионы в поле монополя

SU(2) φ^a - Триплет Хиггсовских полей.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \Phi)^a (D_\mu \Phi)^a - \frac{\lambda}{4}(\varphi^a \varphi^a - v^2)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_\mu &= -ig A^a_\mu \frac{\tau^a}{2} \\ D_\mu \varphi^a &= \partial_\mu \varphi^a + g\,\varepsilon^{abc} A^b_\mu \varphi^c \end{aligned}} \qquad \varphi = -i\,\varphi^a \frac{\tau^a}{2}$$

Вакуум: $A^a_\mu = 0 \qquad \varphi^a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

$$\varphi_0 = -i\,v\frac{\tau^3}{2}$$

$[\varphi_0, \tau^3] = 0 \Rightarrow$ Ненарушена группа электромагнитная $U(1)$

$$\boxed{\omega(x) = \exp\left\{ i\,\alpha(x)\frac{\tau^3}{2}\right\}}$$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} A^1_\mu \text{ и } A^2_\mu \text{ - массивные} \\ A^3_\mu \text{ - безмассовое} \end{array}\right]$

Монопольное решение в регулярной калибровке

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^a &= v n^a (1 - H(r)) \\ A^a_i &= \frac{1}{gr}\varepsilon^{aij} n^j (1 - F(r)), \quad A^a_0 = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(r) &= H(r) = 0 \\ F(0) &= H(0) = 1 \end{aligned}}$$

Конфигурация inv. относительно

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\tau^a n^a}$$

$$[T, \varphi] = 0$$

$$A_\mu \mapsto \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

$$\omega = 1 + iT$$

$$\omega^{-1} = 1 - iT$$

$$A_\mu \mapsto T i A_\mu - i A_\mu T + \cancel{(1+iT)}(-i)\partial_\mu T + A_\mu$$

$$= -i[A_\mu, T] - i\partial_\mu T + A_\mu$$

$$A_i = -i \frac{\tau^a}{2} \frac{1}{r} \varepsilon^{aij} n^j (1 - F(r))$$

$$\delta A_{i} = (-i) \frac{n^b}{2} \frac{(-i)}{r} \varepsilon^{aij} n^j (1 - F(r)) [\tau^a, \tau^b] -$$

$$2i\varepsilon^{abc}\tau^c$$

$$- i(\partial_i n^b)\frac{\tau^b}{2} \qquad \delta_{ib}\delta_{jc} - \delta_{ic}\delta_{jb}$$

$$n^a = \frac{x^a}{\sqrt{\Sigma (x^a)^2}} \qquad \partial_i n^a = \frac{\delta_i^a}{r} - \frac{x^a x^i}{(\Sigma x^{a2})^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{r}(\delta_i^a - n_i n_a)$$

$$\delta A_i = -\frac{i}{2r}(1 - F(r)) [n_i n_c - \delta_{ic}] \tau^c$$

$$- i\frac{\tau^c}{2r}(\delta_{ic} - n_i n_c) \Rightarrow$$

Асимптотика инвариантна относительно T

$$\boxed{\omega(x) = \exp\left\{ i \frac{\tau^a}{2} n^a \right\}}$$

Добавим фермионы – дублет по $SU(2)$ $\boxed{D_\mu \psi = (\partial_\mu + A_\mu)\psi}$

$$\boxed{\mathcal{L}_\psi = i \bar\Psi \gamma^\mu D_\mu \Psi - i h \bar\Psi \Phi \Psi}$$

Антиэрмитова матрица

[redacted] $\boxed{i\gamma^\mu D_\mu \Psi = i h \Phi \Psi}$ [redacted]

Юкавское взаимодействие

① Фермионы в вакууме

A_μ^1, A_μ^2, Φ^a | Массивные, при низких энергиях умирают.

$$i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g \frac{\tau^3}{2} A_\mu^3\right)\Psi = h \frac{\tau^3}{2} v \psi.$$

$\Downarrow$

Фермионы в вакууме имеют заряды $\begin{pmatrix} +g/2 \\ -g/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

и массы $\left(\frac{hv}{2}\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$.

Нестандартный знак массы для ψ_2 $\leftrightarrow$ $\boxed{\psi_2' = \gamma^5 \psi_2}$

$\Downarrow$

2 типа фермионов с противоположными зарядами и одинаковой массой.

Теперь рассмотрим ур-ние в поле монополя

$$i\gamma^\mu D_\mu \Psi = i h \Phi \Psi$$

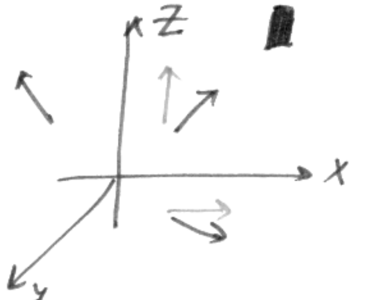
$\boxed{A_0 = 0} \Rightarrow$ Гамильтониан Дирака

$$\boxed{\hat H_D = -i\alpha^i D_i \;\text{[redacted]}\; + i h \Phi}$$

Поле монополя inv. относит. вращений + вращений в. внутр. пр-ве

$$\boxed{\Phi^a = h^a}$$

$\Downarrow$



Так как внешнее поле инвариантно относительно такой комбинации преобразований, то сохраняется только сумма:

$$J^a = \underbrace{L^a + S^a}_{\text{Момент}} + \underbrace{\frac{\tau^a}{2}}_{\text{Изоспин}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L^a &= -i\varepsilon^{abc} x^b \partial_c \\ S^a &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Задача Проверить, что $[J^a, H_D] = 0$.

$$[J^a, J^b] = i\varepsilon^{abc} J^c.$$

Решение:

$$H_D = -i\alpha^i\left(\partial_i - ig\frac{\tau^a}{2}A_i^a\right) + ih\left(-i\frac{\tau^a}{2}\right)\phi^a =$$

$$= -i\alpha^i\partial_i - \alpha^i g\frac{\tau^a}{2}A_i^a + h\frac{\tau^a}{2}\phi^a =$$

$$= -i\alpha^i\partial_i - \frac{g}{2}\alpha^i\tau^a\frac{1}{gr}\varepsilon^{aij}n^j(1-F) + \frac{h\tau^a}{2}v n^a(1-H)$$

$$[L^b, H_D] = [-i\varepsilon^{bcd}x^c\partial_d, -i\alpha^i\partial_i - \frac{1}{2r}\alpha^i\tau^a\varepsilon^{aij}n^j(1-F)$$

$$+ \frac{h\tau^a}{2}\beta n^a(1-H)] =$$

$$= + \varepsilon^{bcd}\partial_d(\alpha^c)\cancel{\delta_c}$$

$$+ i\varepsilon^{bcd}x^c\partial_d\left(+\frac{1}{2r}\alpha^i\tau^a\varepsilon^{aij}n^j(1-F)\right) -$$

$$(\delta_{ab}\delta_{ci} - \delta_{bi}\delta_{ca})$$

$$\frac{i}{2r}\varepsilon^{bcd}\cancel{x^c}\frac{1-F}{\cancel{r}}\alpha^i\tau^a\varepsilon^{aij}(\delta_{dj} - \cancel{n_d n_j})$$

$$\cancel{+\frac{i}{2}\varepsilon^{bcd}x^c n_d\left(\frac{1-F}{r}\right)'\alpha^i\tau^a\varepsilon^{aij}n^j} \to 0$$

$$-i\varepsilon^{bcd}x^c\partial_d\left(+\frac{h\tau^a}{2}\beta n^a(1-H)\right)$$

$$-\frac{ih}{2}\varepsilon^{bcd}\cancel{x^c}\tau^a\frac{\beta}{\cancel{r}}(\delta_{da} - \cancel{n_d n_a})(1-H)$$

$$\cancel{+ i\varepsilon^{bcd}x^c\frac{h\tau^a}{2}\beta n^a(+H')n_d} \to 0$$

$$= \varepsilon^{bcd}\alpha^c\partial_d + \frac{i}{2r}n^c(1-F)\alpha^c\tau^b - \frac{i}{2r}n^c(1-F)\alpha^b\tau^c$$

$$-\frac{ih}{2}\varepsilon^{bcd}n^c\tau^d\beta(1-H)$$

$$[S^a, H_D] = [S^a, (-i\alpha^i\partial_i)] +$$

$$+ [S^a, -\frac{\alpha^i}{2r}\tau^a\varepsilon^{aij}n^j(1-F)]$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha^i = \gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}.$$

$$[S^a, \alpha^i] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -[\sigma^a, \sigma^i] & 0 \\ 0 & [\sigma^a, \sigma^i] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\begin{bmatrix} -\cancel{2}i\varepsilon^{aij}\sigma^j & 0 \\ 0 & \cancel{2}i\varepsilon^{aij}\sigma^j \end{bmatrix} = i\varepsilon^{aij}\alpha^j$$

$$[S^b, H_D] = +\cancel{i}\partial_i(\cancel{i}\varepsilon^{bij}\alpha^j) - \frac{\tau^a}{2r}\varepsilon^{aij}n^j(1-F)\times$$

$$\times i\varepsilon^{bik}\alpha^k$$

$$\delta_{ab}\delta_{kj} - \delta_{ak}\delta_{bj}$$

$$= -\varepsilon^{bij}\alpha^j\partial_i - \frac{i}{2r}\alpha^k\tau^b n^k(1-F) + \frac{i}{2r}\tau^a\alpha^a n^b(1-F)$$

$$\left[\frac{\tau^b}{2}, H_D\right] = \frac{1}{2}\left[\tau^b, -\frac{\alpha^i}{2r}\tau^a\varepsilon^{aij}n^j(1-F)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tau^b, \frac{h\tau^a}{2}\upsilon n^a(1-H)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{+\frac{\alpha^i}{2r}2i\varepsilon^{bac}\tau^c\varepsilon^{aij}n^j(1-F) + \frac{h}{2}\upsilon\, 2i\,\varepsilon^{bac}\tau^c n^a(1-H)\right\} =$$

$$\delta_{bi}\delta_{cj} - \delta_{bj}\delta_{ci}$$

$$= \frac{i\alpha^b}{2r}\tau^c n^c(1-F) - \frac{\alpha^c}{2r}i\tau^c n^b(1-F) + \frac{h\upsilon i}{2}\varepsilon^{bac}\tau^c n^a(1-H)$$

ok

$$[J^a, J^i] =$$

$$= \left[-i\varepsilon^{abc}x^b\partial_c + S^a + \frac{\tau^a}{2}, -i\varepsilon^{ijk}x^j\partial_k + S^i + \frac{\tau^i}{2}\right] =$$

$$= -\cancel{i}\varepsilon^{abc}(\cancel{-i})\varepsilon^{ijk}(x^b\delta_{cj}\partial_k - x^j\delta_{kb}\partial_c)$$

$$+ \underbrace{[S^i, S^j]}_{\frac{2}{2}i\varepsilon^{ijk}S^k} + \left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right]$$

$$i\varepsilon^{ijk}\frac{\tau^k}{2}$$

$$+ x^b\partial_k\varepsilon^{abj}\varepsilon^{ikj} - x^j\partial_c\,\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ikj}$$

$$\delta_{ai}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{bi} \qquad \delta_{ai}\delta_{cj} - \delta_{aj}\delta_{ci}$$

$$\cancel{\delta_{ai}x^k\partial_k} - \underbrace{x^i\partial_a - \cancel{\delta_{ai}x^j\partial_j} + x^a\partial_i}_{}$$

$$\text{"}$$

ok

$$\left[\varepsilon^{aij}(+\varepsilon^{jke}x^k\partial^e)\right] \to x^a\partial_i - x_i\partial_a$$

$$\delta_{ak}\delta_{ie} - \delta_{ae}\delta_{ik}$$

Так как содержится слагаемое $\frac{\tau^a}{2}$, то угловой момент - <u>целый</u>, несмотря на то, что речь идёт о фермионах

$$\Psi_{ki} = \begin{pmatrix} (\Psi_1)_1 & (\Psi_1)_2 \\ (\Psi_2)_1 & (\Psi_2)_2 \\ (\Psi_3)_1 & (\Psi_3)_2 \\ (\Psi_4)_1 & (\Psi_4)_2 \end{pmatrix}$$ 4 x 2 матрица.

$$\tau^a \cdot \Psi \mapsto \left(\Psi \tau^{aT}\right)_{ki}$$

$$\Psi_{ki} = \tilde{\Psi}_{kj}\, \varepsilon_{ji} =$$

$$\Psi_{ki}\, \varepsilon_{il} = \tilde{\Psi}_{ki} \underbrace{\varepsilon_{ji}\varepsilon_{il}}_{-\delta_{jl}} = -\tilde{\Psi}_{kl}$$

$$\boxed{\tilde{\Psi}_{kl} = +\Psi_{ki}\, \varepsilon_{li}} \boxed{= \left(\Psi \varepsilon^T\right)_{kl}}$$

$$\boxed{\Psi_{ki} = \left(\tilde{\Psi} \cdot \varepsilon\right)_{ki}}$$

$$\Psi (\tau^a)^T = \tilde{\Psi} \varepsilon \tau^{aT} = -\tilde{\Psi} \tau^a \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon \tau^{aT} = -\tau^a \varepsilon}$$

$$\begin{cases} i \dfrac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = -i \alpha^i \partial_i \tilde{\Psi} + \dfrac{g}{2} A_i^b \alpha^i \tilde{\Psi} \tau^b - \\ \qquad - \dfrac{h}{2} \varphi^a \beta \tilde{\Psi} \tau^a. \\ J^a \tilde{\Psi} = -i \varepsilon_{abc} x^b \partial_c \tilde{\Psi} + S^a \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi} \dfrac{\tau^a}{2} \end{cases}$$

J^a не перемешивает левые и правые фермионы

Матрицы S и α блочно/диагональны.

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$J^a \psi = \begin{pmatrix} j^a \chi \\ j^a \eta \end{pmatrix}$$

$$j^a \cdot \tilde{\chi} = -i\, \varepsilon_{abc}\, x^b \partial_c \tilde{\chi} + \frac{\tau^a}{2} \tilde{\chi} - \tilde{\chi} \frac{\tau^a}{2}$$

$$= -i\, \varepsilon_{abc}\, x^b \partial_c \tilde{\chi} + \left[\frac{\tau^a}{2}, \tilde{\chi}\right]$$

$$\boxed{j^a \tilde{\chi} = -i\, \varepsilon_{abc}\, x^b \partial_c \tilde{\chi} + \left[\frac{\tau^a}{2}, \tilde{\chi}\right]}$$

$\Downarrow$

$$i \frac{\partial \tilde{\chi}}{dt} = i \sigma^i \partial_i \tilde{\chi} + \frac{g}{2} A_i^b \sigma^i \tilde{\chi} \tau^b - \frac{h}{2} \varphi^a \tilde{\eta} \tau^a$$

$$i \frac{d\tilde{\eta}}{dt} = -i \sigma^i \partial_i \tilde{\eta} + \frac{g}{2} A_i^b \sigma^i \tilde{\eta} \tau^b - \frac{h}{2} \varphi^a \tilde{\chi} \tau^a$$

Будем строить ф-ции с $J^a = 0$

$\underbrace{\ell = 0}$ $\underbrace{\ell = 1}$

2 ВФ с нулевым моментом : ~~$\tilde{\chi}_{00}$~~

$\boxed{\chi_{0,0} \text{ не зависит от углов} \quad \text{спин} = -\text{изоспин}}$

$$\boxed{\tilde{\eta}_{00} = u_2(r,t)}$$

$$[\tau^a, \tilde{\chi}_{00}] = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\chi}_{00} = u_1(r,t) \cdot 1}$$

Волновая ф-ция с $\ell = 1$ $\propto n^a$

$$\boxed{\chi_{0,1} = \tau^a n^a v_1(r,t)}$$

$$\hat{L} f(r) = -i\varepsilon_{abc} X^b \cancel{\partial_c (f(r))} + i\, \varepsilon_{abc} X^b f(r) \partial_c$$

$$= f(r) L$$

$$\hat{L}^2 f(r) = L^a L^a f(r) = 0$$

$$\hat{L}^a n^i = -i\,\varepsilon_{abc} n^b \partial_c (n_i) + n_i \hat{L}^a = -i\,\varepsilon_{abi} n^b + n_i L^a$$

$$\frac{1}{r}\delta_{ic}$$

$$L^a L^a n^i = -iL^a \varepsilon_{abi} n^b + \cancel{L^a n^i L^a} =$$

$$= +i\, \varepsilon_{abi} (+i\, \varepsilon_{acb} n^c) = 2n^i$$

$$2\delta_{ic}$$

$\Downarrow$

$l = 2$

$n^1 \; n^2 \; n^3$ ← Из них можно построить 3 состояния

$\cancel{[\hat{J}^a, n^i \alpha_{ij} \tau^j + n^a \beta_i]}$

$\cancel{\hat{J}^a \cdot X} = \cancel{n^i \alpha_{ij} \tau^j}$

$$j^a \cdot X = i\, \overset{-i\varepsilon_{abi}}{(\cancel{-i\varepsilon_{abc} x^b \partial_c})} [\, n^b \alpha_{ik} \tau^k + n^b \beta_i]$$

$$+ \tfrac{1}{2}[\tau^a, n^i \alpha_{ij} \tau^j] + \tfrac{1}{2}\cancel{[\tau^a, n^i \beta_i]} \to 0$$

$$2i\varepsilon^{ajk}\tau^k$$

$$+\varepsilon_{abi} n^b \alpha_{ik} = n^i \alpha_{ij} \varepsilon^{ajk} \;\; \text{тмо}$$

$$\varepsilon_{ake} \quad \varepsilon_{abi} n^b \beta_i = 0$$

$$\delta_{bk}\delta_{ie} - \delta_{ki}\delta_{eb}$$

$$n^k \beta_e = n^l \beta_k$$

$$\left| \begin{array}{l} n^1\beta^2 = n^2\beta^1 \\ n^1\beta^3 = n^3\beta^1 \\ n^2\beta^3 = \end{array} \right| \Rightarrow \cancel{\beta_i = \beta \cdot n_i}$$

Зависит только от r

$\underline{\alpha_{ik} = \delta_{ik}}$ $\quad$ ~~$\varepsilon_{abk} n^b = n^j \varepsilon_{ajk}$~~ $\to$ ok

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{X}}_{0,1} = \tau^a n^a v_1(r,t) \\ \tilde{\mathcal{Z}}_{0,1} = \tau^a n^a v_2(r,t) \end{bmatrix}$$ $\leftarrow$ 2 моды с нулевым моментом.

$\Downarrow$

$$\boxed{\tilde{X} = 1\cdot u_1(r,t) + \tau^a n^a v_1(r,t)}$$ $\leftarrow$ В секторе с нулевым моментом

<u>Теорема</u>. При $h \neq 0$ $\exists$ нормируемая ВФ с $J=0$.

Вблизи центра монополя $\boxed{A_i = 0,\ \varphi = 0}$

$\Downarrow$

<u>Гамильтониан Дирака сводится к свободному</u>.

Если нет центробежного барьера $\leftrightarrow$ $\boxed{L=0}$

$\boxed{\tilde{X} = 1\cdot u_1(r)}$ $\quad$ $\boxed{\tilde{Z} = 1\cdot u_2(r)}$

$\Uparrow$

<u>Подстановка проходит через ур-ния!</u>

$$0 = i\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x^0} = i\tau^a \partial_r u_1 n^a - \frac{1}{2}\frac{1}{2g}\varepsilon^{abj} n^j \left(\frac{1-F}{r}\right)\tau^b u_1(r)\tau^a - \frac{h}{2} v n^a (1-H) u_2 \tau^a$$

$$-i\varepsilon^{abc}\tau^c$$

$$= \cancel{i\tau^a n^a}\left(i\partial_r u_1 - \frac{1}{2} u_1 \left(\frac{1-F}{r}\right) - \left(\frac{h}{2}v\right) u_2 (1-H)\right)$$

m_F

$$\boxed{\begin{aligned} &i\left(u_1' + \tfrac{1}{2} u_1 \left(\tfrac{1-F}{r}\right)\right) - m_F u_2 (1-H) = 0 \\ &-i\left(u_2' + \tfrac{1-F}{r} u_2\right) - m_F u_1 (1-H) = 0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z_+ &= u_1 - i u_2 \\ Z_- &= u_1 + i u_2 \end{aligned}}$$

$$i\left(Z_-' + \frac{1-F}{r} Z_-\right) - i m_F (1-H) \overbrace{(i u_2 + u_1)}^{Z_-} = 0$$

$$i\left(Z_+' + \frac{1-F}{r} Z_+\right) + m_F (1-H) Z_+ = 0$$

~~$u_1 = -i u_2$~~

$$Z_- = u_1 + i u_2 = \alpha \exp\left\{ \int_0^r \left[-\frac{1-F}{r} + m_F (1-H) \right] dr \right\}$$

$\downarrow$

Не нормируемо

$$u_2 = -i u_1 = c \exp\left\{ -\int_0^r \left[\frac{1-F}{r} + m_F (1-H) \right] dr \right\}$$

$\uparrow$

Нормируемое

Теорема В секторе с $J = 0$. существует только одна нулевая мода., гладкая при $r \to 0$ и убывающая при $r \to \infty$.

Теорема 2 В секторах с $J \neq 0$ нулевых мод нет

$\Downarrow$

2 вырожденных состояния монополя!

Фермионные числа $+1/2$ и $-1/2$