Матрицы Дирака в произвольной размерности

$\boxed{D=2}$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = i\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(5)} = -\gamma^0\gamma^1 = -\alpha = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau^3$$

$\boxed{D=3}$

$$\gamma^{(5)+} = \gamma^5 = -\gamma^{1+}\gamma^{0+} = +\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1 = \gamma^{(5)}$$

эрмитова

$$\boxed{\Gamma^0 = \gamma^0} \quad \boxed{\Gamma^1 = \gamma^1} \quad \boxed{\Gamma^2 = i\gamma^{(5)}}$$

$$(\Gamma^2)^2 = -1 = +(i)^2 \gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1$$

ok

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$\square$

$\boxed{D=4}$

$$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^{(5)}$$

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ -\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^1 \\ +i\gamma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{(5)} \\ -\gamma^{(5)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{0+} = \Gamma^0$$

$$\Gamma^{1+} = -\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{0+} \\ \gamma^{0+} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{2+} = -\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -(i\gamma^1)^+ \\ (i\gamma^1)^+ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{3+} = \Gamma^3$$

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 \\ -\tau_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma^\mu &= (1, \vec\sigma) \\ \bar\sigma^\mu &= (1, -\vec\sigma) \end{aligned}}$$

$\Downarrow$

Получили спинорное представление γ-матриц.

$\boxed{D=5}$ $\boxed{\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3}$ $\boxed{\text{Стартуем с 4-мерных } \gamma\text{-матриц}}$

$$\gamma^{5+} = \gamma^5$$

$$\gamma^5 = -i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix}}$$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

$$= -i \begin{pmatrix} \underbrace{\sigma^1\sigma^2}_{+i\sigma^3}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\underbrace{\sigma^1\sigma^2}_{-i\sigma^3}\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

В $\boxed{D=5}$ $\boxed{\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \gamma^\mu \\ \Gamma^5 &= i\gamma^{(5)} \end{aligned}}$

Обобщение очевидно.

Пусть D – чётно γ^μ – γ-матрицы.

$$\gamma^{(5)} = \underset{1}{i}\cdot\gamma^0\gamma^1\ldots\gamma^D.$$

Либо i, либо 1 для того чтобы $\gamma^{(5)}$ был эрмитовым.

~~Задача Д-ть, что в нечётных измерениях γ^5 =~~

~~Решение $\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu$~~

~~$tr(\gamma^5\gamma^\mu) =$~~

~~$tr(\gamma^\mu\gamma^5)$~~

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\ldots\gamma^D + i\gamma^0\gamma^1\ldots\gamma^D\gamma^\mu = 0$$

$\Downarrow$

γ^5 антикоммутирует со всеми γ-матрицами в чётном числе измерений.

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^\mu &= \gamma^\mu \\ \Gamma^{D+1} &= i\gamma^5\end{aligned}} \quad - \quad \boxed{\gamma\text{ - матрицы в } D+1}$$

$\boxed{\text{В}}\ \boxed{D+2}$

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^{D+1} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ -\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^1 \\ -i\gamma^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^{D+2} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{(5)} \\ -\gamma^{(5)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma^D = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^D \\ -i\gamma^D & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

γ-матрицы в размерности $D = 2k$ имеют размер $\boxed{2^k \times 2^k}$

Фермион имеет 2^k компонент. независимых

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2^{k-1} \text{ фермионов} \\ 2^{k-1} \text{ антифермионов} \end{array}}$$

<u>Задача</u> Дан спин $s=1/2$ в $D=2k$

Показать, что у него 2^{k-1} состояний.

~~<u>Решение</u>:~~

Симметрии ур-ния Дирака в $D=4$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0$$

$$i\partial_0 \Psi = -i\underbrace{\gamma^0\gamma^i}\partial_i\Psi + m\beta\Psi$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^i &= \gamma^0\gamma^i \\ \beta &= \gamma^0\end{aligned}} \qquad \boxed{i\partial_0\Psi = H_D\Psi}$$

$$\boxed{H_D = -i\alpha^i\partial_i + m\beta}$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полный угловой момент

$$\boxed{\mathcal{L}_i = -i\,\underbrace{\varepsilon_{ijk}X_j\partial_k}_{\substack{\| \\ [\hat{X}\times\hat{p}] \\ \text{Угловой момент } L}} + \underbrace{\hat{S}_i}_{\text{Спин}}}$$

$$\boxed{S_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^i \end{pmatrix}}$$

Убедимся в сохранении L

$$[\hat{L}_i, \hat{H}_D] = -i\,\cancel{\varepsilon_{ijk}X_j\partial_k(-i\alpha^s\partial_s)} +$$

$$+ (+i\alpha^s\partial_s)(+i\,\varepsilon_{ijk}X_j\partial_k) +$$

$$+ \underbrace{\cancel{[m\beta, -i\varepsilon_{ijk}X_j\partial_k]}}_{0} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\alpha_j\,\partial_k$$

$$[S_i, H_D] = +i\,(i)\,\varepsilon_{ijk}\alpha_k\partial_j = -\varepsilon_{ijk}\alpha_j\partial_k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k} \qquad \boxed{[\hat{\mathcal{L}}, H_D] = 0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} \text{ сохраняется}}$$

$$[S_i, \alpha_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\alpha_k$$

Задача Показать, что

$$\boxed{\begin{aligned}[L_i, L_j] &= i\varepsilon_{ijk} L_k\\ [S_i, S_j] &= i\varepsilon_{ijk} S_k\\ [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] &= i\varepsilon_{ijk}\mathcal{L}_k\end{aligned}}$$

Дискретные симметрии

P - симметрия : $\boxed{\Psi_P(\vec{x},t) = P\cdot\Psi(-\vec{x},t)}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P = \gamma^0}$$

C - симметрия $\boxed{\begin{aligned}\psi^c &= C\psi^*\\ C &= -i\gamma^2\end{aligned}}$

$$\psi^c = \tilde{C}\bar{\Psi}^T = \underbrace{\tilde{C}}_{-i\gamma^0\gamma^2\gamma^0}\gamma^0\psi^* \qquad \text{ok}$$

$\boxed{\text{T - симметрия}}$ $\boxed{\begin{aligned}\psi^T(\vec{x},t) &= T\psi^*(-t,\vec{x})\\ T &= -\gamma^1\gamma^3\end{aligned}}$

$\|$

$\boxed{CP}$

$$\psi^c = C\psi^* = -i\gamma^2\psi^*$$

$$\psi^{CP} = \gamma^0(-i\gamma^2)\psi^*(t,-\vec{x})$$

$$\psi^{CPT} = -\gamma^1\gamma^3(\bar{\phi}_i)\gamma^0\gamma^2\ \Psi(-t,-x)$$

$$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Задача Показать, что $\boxed{\psi^{CPT} = -\gamma^5\Psi(-x,-t)}$

1) C, P, T - Симметрии ур-ния Дирака в 4D

2) $P\,u^1_{(\vec{p})} = u^1(-\vec{p})$ То же самое с v

$P\,u^2(\vec{p}) = u^2(-\vec{p})$ $\longleftrightarrow$ ч-за

$$C\,[u^s(\vec{p})]^* = v^{+s}(\vec{p})$$

$$T\,[u^s(\vec{p})]^* = u^{-s}(-\vec{p})$$

Решение (1)

$$P: \quad \cancel{P}\, i\gamma^0\partial_0 \cancel{P}\Psi(t,-x) + \cancel{P} i\gamma^i\partial_i \cancel{P}\Psi(t,-x) = m\cancel{P}^{1}\Psi(t,-x) \text{ ok}$$

$$C: \quad i\gamma^0\partial_0 C\Psi^* + i\gamma^i\partial_i C\Psi^* = mC\Psi^*$$

$$\cancel{C}(+i\gamma^{0*})\partial_0 \cancel{C}^*\Psi + \cancel{C}(i\gamma^{1})^*\partial_1 \cancel{C}^*\Psi + \cancel{C}(i\gamma^{2})^*\partial_2 \cancel{C}^*\Psi -$$

$$\cancel{C} i(\gamma^{3*}\partial_3)\cancel{C}^*\Psi = m\cancel{C}^*\Psi \quad \text{ok}$$

$$C = -i\gamma^2 \quad \Rightarrow \boxed{C^* = C}$$

$$C^2 = (-i\gamma^2)^2 = -(\gamma^2)^2 = 1$$

$$T: \quad -i\gamma^0\partial_0 T\Psi^*(-t,x) + i\gamma^i\partial_i T\Psi^*(-t,x) = Tm\Psi^*(-t,x)$$

$$\cancel{T}(+i\gamma^0)^*\partial_0 \cancel{T}^*\Psi(-t,x) + \cancel{T}(i\gamma^{1,3})^*\partial_{1,3}\cancel{T}^*\Psi(-t,x) +$$

$$- \cancel{T}(+i\gamma^{2*})\partial_2 \cancel{T}^*\Psi(-t,x) = \cancel{T}^* m\Psi(-t,x). \quad \text{ok}$$

$$\boxed{T = -\gamma^1\gamma^3}$$

$$T^* = T$$

(2) $$P\, u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}\,\xi^s \\ \sqrt{p\sigma}\,\xi^s \end{pmatrix} = u^s(-\vec{p}). \quad \text{ok}$$

$$C[u^s(\vec{p})]^* = -i\gamma^2 \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^s \end{pmatrix}^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}^*}\,\xi^s \\ i\sigma^2\sqrt{p\cdot\sigma^*}\,\xi^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,(-i\sigma^2)\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,(i\sigma^2)\,\xi^s \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\sigma^2\,\bar{\sigma}_\mu^* = +\sigma_\mu^*\,\sigma^2}$$

$$\boxed{i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$-i\sigma^2\,\xi^s = \xi^{-s}$$

$$\boxed{\sigma^2\,\sigma_\mu^* = \bar{\sigma}_\mu^*\,\sigma_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{-s} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{-s} \end{pmatrix} = v^s(p).$$

ok

$$\boxed{\begin{aligned} u^s(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{+s} \end{pmatrix} \\ v^s(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{-s} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{-s} \end{pmatrix} \end{aligned}}$$