Дробление заряда

$$\boxed{N_f, \leftrightarrow Q}$$

Обнаружено в физике конденсированных сред.

$\varphi(x,t)$ – Скаляр

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m\Psi$$ – Лоренц-Ковариантное ур-ние

Простейший член вз-я.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \underbrace{h\varphi}_{\text{Скаляр}}\Psi.$$

Скаляр $\varphi'(x') = \varphi(x)$

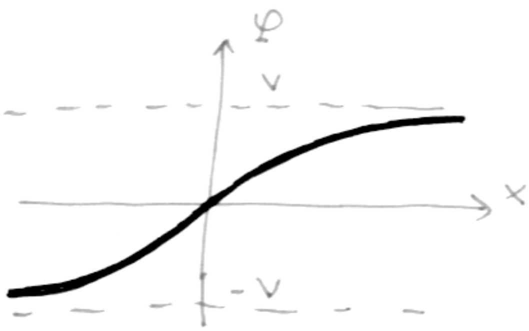
$$i\gamma^0 \partial_0 \Psi + i\gamma^1 \partial_1 \Psi = h\varphi\Psi.$$

$$\boxed{i\partial_0\Psi = H_D\Psi} \qquad \boxed{H_D = -i\alpha\,\partial_1 \text{[redacted]} + h\varphi\gamma^0 \text{[redacted]}}$$

Не как с э/м полем

Пусть φ – внешнее поле Кинка

$$\boxed{V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2}$$



$$\boxed{\varphi = v\, th\left[v\sqrt{\lambda/2}\, x \text{[redacted]}\right]}$$

$$\mathcal{L} = \iint\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi)\right] dx\,dt$$

$$+\partial_\mu \partial_\nu \varphi + V'(\varphi) = 0$$

$$\partial_x^2 \varphi = V'(\varphi)$$

$$\partial_x \left\{ \frac{v^2 \sqrt{\lambda/2}}{ch^2 \left[v\sqrt{\lambda/2}\, x \right]} \right\} = - \frac{\cancel{2} v^3 \left(\sqrt{\cancel{\lambda/2}}\right)^2 \lambda\, sh\left[v\sqrt{\lambda/2}\,x\right]}{ch^3\left[v\sqrt{\lambda/2}\,x\right]} =$$

$$= \frac{\lambda}{4} \cdot 4 \varphi (\varphi^2 - v^2) = \lambda v^3\, th\left[v\sqrt{\lambda/2}\,x\right] \underbrace{\left(th^2\left(\frac{v\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}x\right) - 1 \right)}_{-\frac{1}{ch^2\left[v\sqrt{\lambda/2}\,x\right]}}$$

ok

Антикинк $\varphi_a(x) = \varphi_k(-x) = -\varphi_k(x)$.

Решим ур-ние Дирака в поле Кинка

$$\boxed{H_D \Psi = E \Psi}$$

$$x \mapsto +\infty$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi \mapsto h v$$

фермиона $\boxed{m = h v}$

Мы будем пренебрегать обратным влиянием фермионов на поле кинка

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M_k \gg E \sim m}$$

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x \varphi_k)^2 + V(\varphi_k) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{v^4 \lambda}{2 \cdot 2} \frac{1}{ch^4\left(v\sqrt{\lambda/2}\,x\right)} + \frac{\lambda}{4} v^4 \frac{1}{ch^4\left(v\sqrt{\lambda/2}\,x\right)} \right\}$$

$$M_k = \frac{\sqrt{\lambda}\, v^3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M_k \propto \sqrt{\lambda}\, v^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\lambda}\, v^2 \gg h v \qquad \boxed{v^2 \gg h/\sqrt{\lambda}} \quad \leftrightarrow$$

Мы работаем вот в таком вот режиме.

Ключевой эффект $\leftrightarrow$ Есть связанное состояние с $\boxed{E=0}$

$$\boxed{\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

$$-i \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + h \varphi_k(x) \overbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = E \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} i\partial_x \xi + h\varphi_k(x)\eta = \cancel{E\xi} & \Rightarrow \partial_x \xi = i h \varphi_k(x) \eta \\ -i\partial_x \eta + h\varphi_k(x)\xi = \cancel{E\eta} & \Rightarrow \partial_x \eta = -i h \varphi_k(x) \xi \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Решим это ур-ние при } E=0}$$

$$\partial_x(\xi + i\eta) = i h \varphi_k(x) \eta + \cancel{i}(\cancel{-i})\, h \varphi_k(x) \xi =$$

$$= h \varphi_k(x)(\xi + i\eta)$$

$$\partial_x(\xi - i\eta) = i h \varphi_k(x) \eta - \cancel{i}(\cancel{-i})\, h \varphi_k(x) \xi =$$

$$= -h \varphi_k(x)(\xi - i\eta)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi + i\eta &= A \exp\left\{ h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\} \\ \xi - i\eta &= B \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\} \end{aligned}}$$

<u>При больших x</u> : $\int_0^x \varphi_k(x')dx' \approx const + hvx \mapsto +\infty$
при $x \mapsto +\infty$

$$\int_0^x \varphi_k(x')dx' \mapsto +xhv \mapsto +\infty \quad \text{при } x \mapsto -\infty$$

$\Downarrow$

<u>Для локализованного уровня.</u> $\boxed{A = 0}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \xi + i\eta = 0 \\ \xi - i\eta = B \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\}. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\xi = -i\eta$$

$$-2i\eta = B \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\}.$$

$$\begin{cases} \eta = \frac{iB}{2} \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\} \\ \xi = \frac{B}{2} \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\}. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Psi_0 = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp\left\{ -h \int_0^x dx' \varphi_k(x') \right\}}$$

$$\int dx\ \Psi_0^+ \Psi_0 = 1 = \frac{|B|^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \exp\left\{-2h \int_0^x dx'\ \varphi(x')\right\}$$

$\Uparrow$

Отсюда вычисляется B

Эта мода обладает забавными св-вами

Задача Показать, что $\Psi_0^c(x)$ [redacted] $= \Psi_0$

$\Downarrow$

Мода C - инвариантна: не является ни фермионом ни анти фермионом $\boxed{C = \tau^3}$

Заодно показать, что H_D C - симметричен

В поле антикинка

$$\boxed{\varphi_a(x) = \varphi_k(-x)}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\varphi_a(x) = \varphi_k^{(P)}(x)}$$

$\Downarrow$

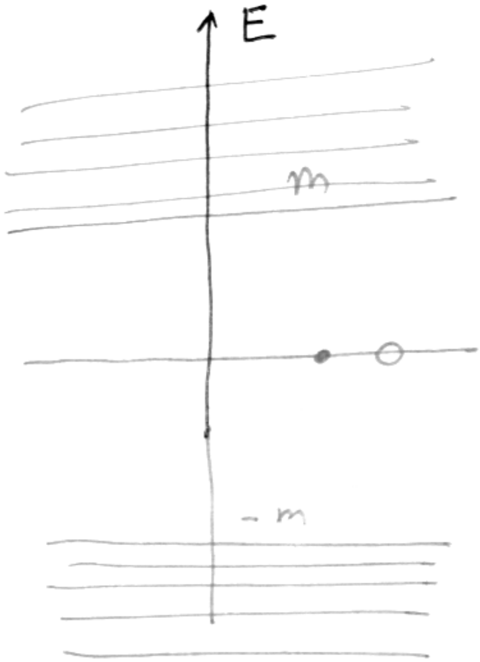
В поле антикинка есть нулевая мода

$[P = \gamma^0]$

$$\boxed{\begin{aligned}\Psi_0^{(a)}(x) &= P\,\Psi_0(-x) = \\ &= \frac{B}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left\{+2h \int_0^x dx'\ \varphi_a(x')\right\}.\end{aligned}}$$

Задача 2 Показать, что в топологически / тривиальных внешних полях нулевые моды отсутствуют.

Решение   Очевидно



Есть 2 вырожденных по энергии уровня: $|e\rangle$ $|f\rangle$

В одном есть фермион на уровне с $E=0$, а в другом — нет

$$\boxed{-N_e^{(k)} + N_f^{(k)} = 1}$$

Для антикинка — аналогично

$$\boxed{N_f^{(a)} - N_e^{(a)} = 1}$$

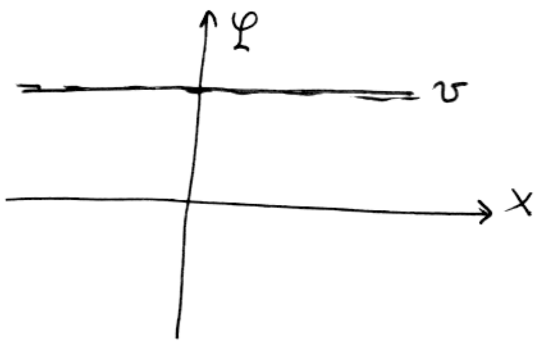
Давайте будем показывать, что
$$\begin{array}{l} N_f^{(k)} \text{ и } N_f^{(a)} = 1/2 \\ N_e^{(k)} \text{ и } N_e^{(a)} = -1/2 \end{array}$$

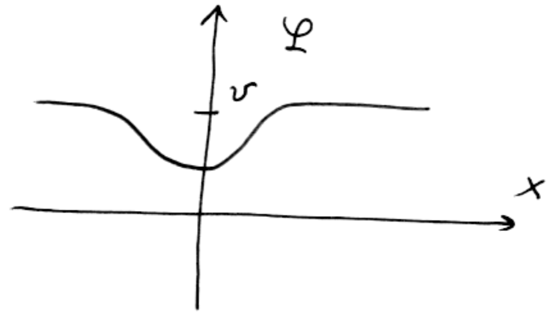
Нужно приписывать полуцелые фермионные числа

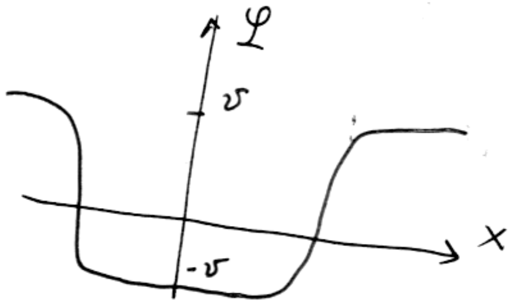
P-симметрия: $k \mapsto A$, $\psi_0^{(k)} \mapsto \psi_0^{(A)}$ $\Rightarrow$
$$\boxed{\begin{array}{l} N_f^{(k)} = N_f^{(A)} \\ N_e^{(k)} = N_e^{(A)} \end{array}}$$

~~Заметим, что это уже очевидно если мы будем серьёзно относиться к Q-симметрии.~~

Давайте адиабатически рождать пару кинк – антикинк







$$i\partial_0 \Psi = H_D \Psi.$$

Так как ~~время~~ внешнее поле меняется медленно, то

посмотрим, как меняется спектр с течением времени

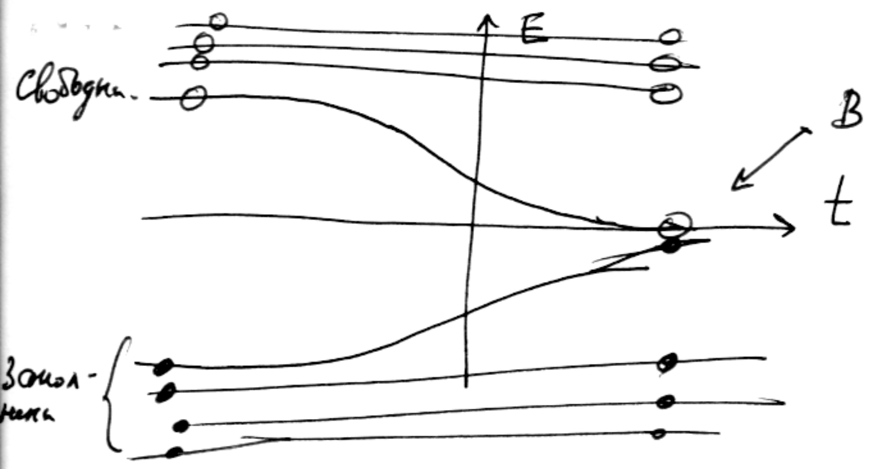
$$\boxed{H_D(t)\,\Psi = E(t)\,\Psi}\quad , \; t \text{ - параметр}$$

$$\left[-i\alpha\,\partial_x + h\beta\,\varphi\right]\Psi = E(t)\,\Psi.$$

Картинка C-симметрична $\Rightarrow$ Если есть решение с энергией E, то есть решение с энергией $-E$

$\Downarrow$

Уровни движутся симметрично.



В конце 2 уровня с нулевой энергией.

При адиабатическом изменении поля фермионы не перескакивают с уровня на уровень.

$\Downarrow$

1 нулевой уровень будет заполнен в конце

$$\boxed{\text{Это – либо уровень, локализованный на кинке, либо – локал. на антикинке.}}$$

Будем считать, что в таких пр-ссах не изменяется N

$\Downarrow$

$$N_e^{(k)} + N_f^{(a)} = 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_e^{(k)} = -\tfrac{1}{2} \\ N_f^{(a)} = \tfrac{1}{2} \end{array}}$$

$\leftrightarrow$ Если ч-цы несут эл. заряд, то мы заключаем, что

$$\boxed{\begin{array}{lll} f & \leftrightarrow & Q = \tfrac{1}{2} \\ e & \leftrightarrow & Q = -\tfrac{1}{2} \end{array}}$$

Это - правда: Если ввести вз-е с полем A_μ и посчитать эл. заряд 0-й моды кинка, то получится $\tfrac{1}{2}$.

Но это надо делать в рамках КТП.