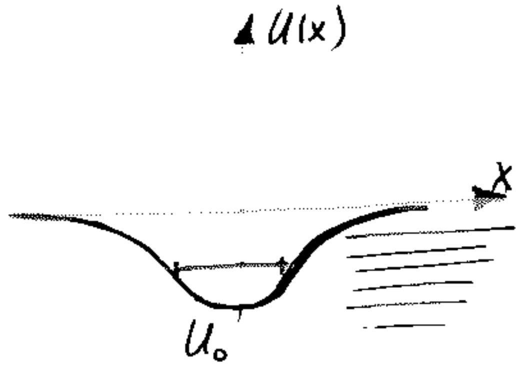
Критический заряд



$$U(x) = -U_0 f(x)$$

$$f(x) \sim 1$$

Мы можем определить значение константы U_0, при которой $\boxed{E_0 < -m}$

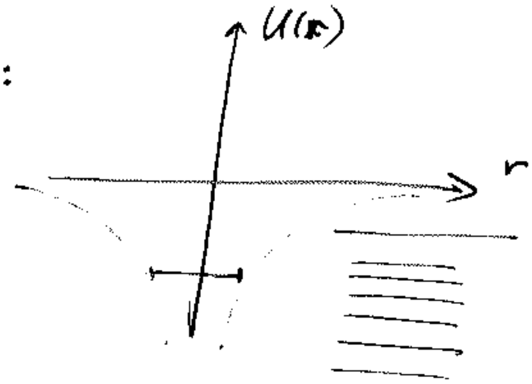
Критическое значение потенциала.

При этом значении один из морских фермионов протуннелирует и займёт уровень

$\Downarrow$

При $\boxed{U_0 > (U_0)_c}$ поле $U(x)$ будет экранироваться.

Аналог в 4D:



$$\boxed{U(r) = \frac{Q}{r}}$$

$\boxed{Q = 170}$ – в 4D.

Давайте продемонстрируем эту картинку в 2D

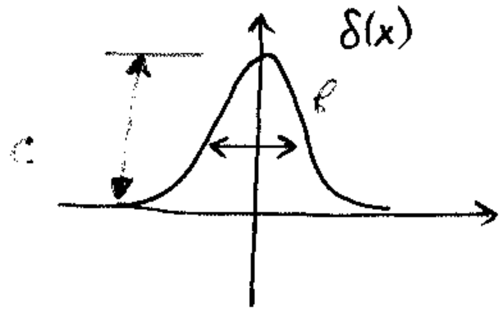
$$U(x) = -U_0 \cdot \delta(x)$$

$\uparrow$

Как бы значение поле.

Какое критическое значение U_0?

Пусть



$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

$\boxed{\ell \mapsto 0}$ ⇒ Точная δ - ф-ция

$$-i\alpha\,\partial_x\Psi - m\beta\Psi - U_0\,\delta(x)\Psi = E\Psi.$$

$$-i\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x\xi\\ \partial_x\eta\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} - U_0\,\delta(x)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\partial_x\xi - m\eta - U_0\delta(x)\xi &= E\xi\\ -i\partial_x\eta - m\xi - U_0\delta(x)\eta &= E\eta\end{aligned}}$$

Вблизи $\boxed{x=0}$

$$i\,\partial_x\xi = U_0\,\delta(x)\,\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi = \xi_0\exp\left\{-i\int_0^x U_0\,\delta(x')\,dx'\right\}}$$

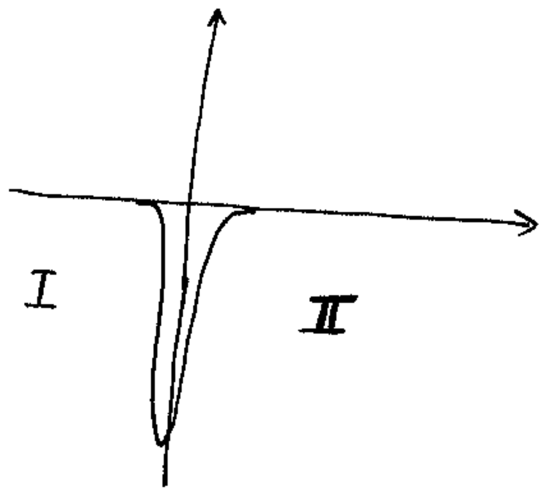
$\boxed{1 \gg \delta x \gg \ell}$

$$\begin{cases}\xi(\delta x) = \xi_0\exp\left\{-i\int_0^{\delta x} U_0\,\delta(x)\,dx\right\}\\ \xi(-\delta x) = \xi_0\exp\left\{-i\int_0^{-\delta x} U_0\,\delta(x)\,dx\right\}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\xi(\delta x)}{\xi(-\delta x)} = \frac{\xi(+0)}{\xi(-0)} = \exp\{-iU_0\}}$$

Аналогично $\boxed{\dfrac{\chi(+0)}{\chi(-0)} = \exp\{iU_0\}}$



U_{-ik}

$$\Psi_I = A\begin{pmatrix} m \\ E-ik \end{pmatrix} e^{kx}$$

$$\Psi_{III} = B\begin{pmatrix} m \\ E+ik \end{pmatrix} e^{-kx}$$

U_{ik}

$\boxed{\begin{matrix} k=0 \\ E=-m \end{matrix}}$ $\boxed{A=-B}$

$$\boxed{\begin{matrix} \Psi_I = -Bm\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Psi_{III} = Bm\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}} \mapsto \text{Скачок}$$

$\boxed{k = i\varkappa}$

$$\boxed{\begin{matrix} \Psi_I = -B\begin{pmatrix} m \\ -m \end{pmatrix} e^{i\varkappa x} \\ \Psi_{III} = Bm\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\varkappa x} \end{matrix}}$$

Решение, описывающее падение на центр.

Сшивка: $\dfrac{Am}{Bm} = e^{+iU_0}$

$$\frac{A(E-ik)}{B(E+ik)} = e^{-iU_0} = e^{iU_0}\frac{(E-ik)}{E+ik}$$

$$\frac{E+ik}{E-ik} = e^{2iU_0}$$

$$k^2+E^2 = m^2-E^2+E^2 = m^2$$

$$\boxed{\sin\Psi = k/m} \quad \boxed{\cos\Psi = E/m}$$

$$\frac{\cos\Psi + i\sin\Psi}{\cos\Psi - i\sin\Psi} \to e^{2i\Psi} = e^{2iU_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Psi = U_0 + \pi n}$$

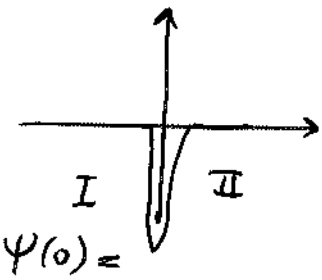
$\boxed{U_0 = \pi} \Rightarrow E = -m$

CRITICAL

$$E/m = \pm\cos U_0 \Leftrightarrow \boxed{E = \pm m\cos U_0}$$

Нерелятивистская QM

$$-\frac{1}{2m}\psi'' - U_0\,\delta(x)\,\psi = 0.$$



$$-\frac{1}{2m}\psi'(+0) + \frac{1}{2m}\psi'(-0) = U_0\,\psi(0) =$$

$$= U_0$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_I &= e^{+kx}\\ \psi_{II} &= e^{-kx}\end{aligned}\right] \Rightarrow \quad +\frac{2k}{2m} = U_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = mU_0}$$

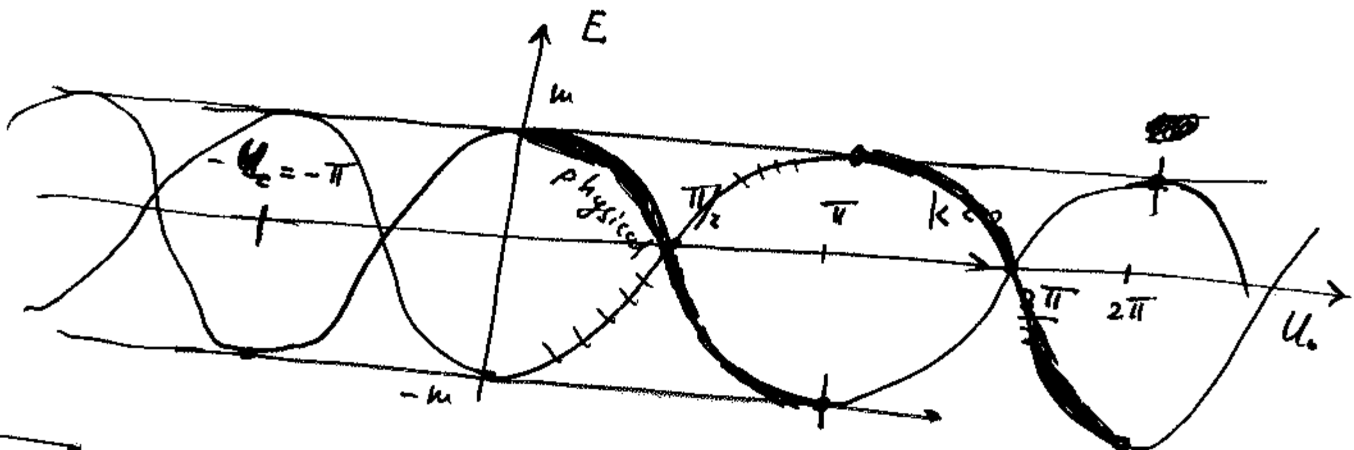
ok

$$\boxed{E = -\frac{k^2}{2}}$$

~~Замечание: Этот случай особый. Тут достигается E_c, но потом уровни опять поднимаются~~

Это ошибка описания! Мы ищем только в фермионном секторе!

Пусть $\boxed{U_0 > (U_0)_c = \pi}$



$$\boxed{k > 0}$$

$$k = m \sin U_0$$

$$k = -m \sin U_0$$

~~[illegible]~~

Уровни рождаются при $\boxed{E = U}$ ← ~~[illegible]~~ локализуются,
Затем они движутся вниз, доходят до AF спектра и делокализуются. При $U_0 < 0$ картина с точностью до наоборот.

Несохранение фермионных квантовых чисел в $D=2$

Явление, тесно связанное с γ^5-аномалией.

Аномалия Адлера - Белла - Джэкива

Рассмотрим теорию б/м фермионов в $D=2$.

$$-i\alpha\,\partial_x\Psi = E\Psi.$$

$$\boxed{\Psi(+0) = \Psi(L)}$$

Наши решения не годятся, у них хромает нормировка

Замечаем: $\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1 = -\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\Psi = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}}$$

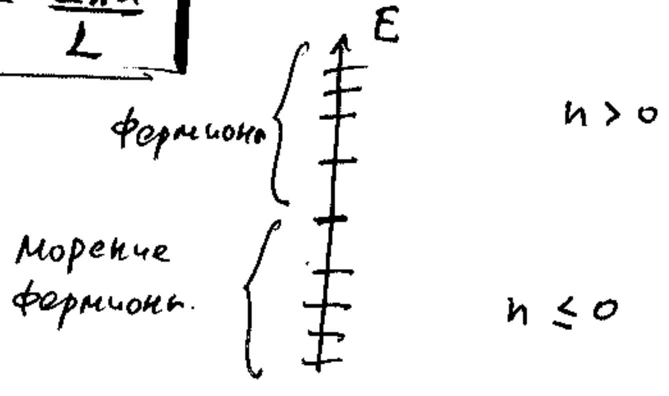
ξ - левый фермион

η - правый фермион

Ур-ния расщепляются

$$\begin{array}{lll} \boxed{E_n = p_n} & \text{левые} & i\partial_x\xi = E\xi \\ \boxed{E_n = -p_n} & \text{правые} & -i\partial_x\eta = E\eta \end{array} \implies \boxed{\begin{array}{l} \xi_n = \dfrac{e^{-2\pi n i\frac{x}{L}}}{\sqrt{L}} \\ \eta_n = \dfrac{e^{+2\pi n i x/L}}{\sqrt{L}} \end{array}}$$

$$\boxed{p_n = \frac{2\pi n}{L}}$$



Почему левые и правые фермионы в $D=2$?

~~Нестационарное ур-ние~~

$$\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}=\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi$$

$$\begin{pmatrix}0\\\eta\end{pmatrix}=\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi$$

Нестационарное решение

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-iE_nt-iE_nx}=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-iE_n(t+x)}$$ Волны, движ. налево

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-iE_nt+iE_nx}=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-iE_n(t-x)}$$ Движ. направо

Так как мы получили независимые ур-ния для ξ и η

N_L — число фермионов левых

$$\boxed{N_L=N\begin{pmatrix}\text{фермионов, } n\geq 0\\ \text{движ. налево}\end{pmatrix}-N\begin{pmatrix}\text{дырок, } n<0\\ \text{движ. налево}\end{pmatrix}}$$

Сохраняются по-отдельности.

ρ_L ρ_R

$$\boxed{\rho=\psi^+\psi}=\overline{\xi^+\xi}+\overline{\eta^+\eta}$$

Полная плотность фермионов

$$\boxed{N_F=N_L+N_R}$$ ← Полное число фермионов

$$\boxed{Q_5=N_L-N_R}$$

Сохраняется N_F Но сохраняется также

$\boxed{Q_5}$ Действительно,

$$\rho_5 = \psi^+\gamma^5\psi = \underbrace{\xi^+\xi}_{\rho_L} - \underbrace{\eta^+\eta}_{\rho_R}.$$

Введём ток $\boxed{j^{5\mu} = \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi.}$

$$\partial_\mu j^{5\mu} = \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi + \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\partial_\mu\psi$$

$$\boxed{i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi}$$

$$-i\,\partial_\mu\psi^+\gamma^{\mu+}\gamma^0 = m\psi^+\gamma^0$$

$$\gamma^{\mu+}\gamma^0 = +\gamma^0\gamma^\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{-i\,\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu = \cancel{m\bar\psi}\,0}$$

$$\partial_\mu j^{5\mu} = \cancel{}\ 0 - 0 = 0$$

$$\partial_0 Q^5 = \int \underbrace{\psi^+\gamma^5\psi}_{\partial_0 j^{50}}\, d^1x = -\int \partial_1 j^{51}\, dx = 0$$

$$\Downarrow$$

Q^5 называется киральностью

В электро-магнитном поле

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$i(\partial_0 - ieA_0)\psi + i\alpha(\partial_x - ieA_x)\psi = 0$$

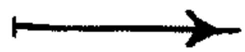
Опять же, компоненты независимы.

Но: Как мы сейчас увидим, $E \neq 0$ ведет к

несохранению киральности Q_5

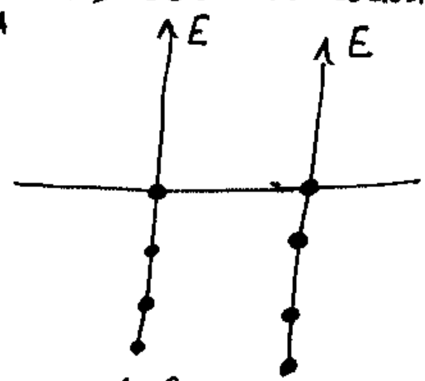
Пусть при $t \mapsto -\infty$

$E > 0$ накладывается на систему фермионов



при $t \mapsto +\infty$ эл. поле выключается.

$t \mapsto -\infty$ $\Rightarrow$ Основное состояние

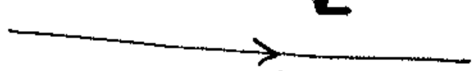


левое правое.

$$E = -\partial_0 A_x + \partial_x A_0 =$$

$$= -\partial_x A_0 - \partial_0 A_x = -\partial_0 A_x$$

E



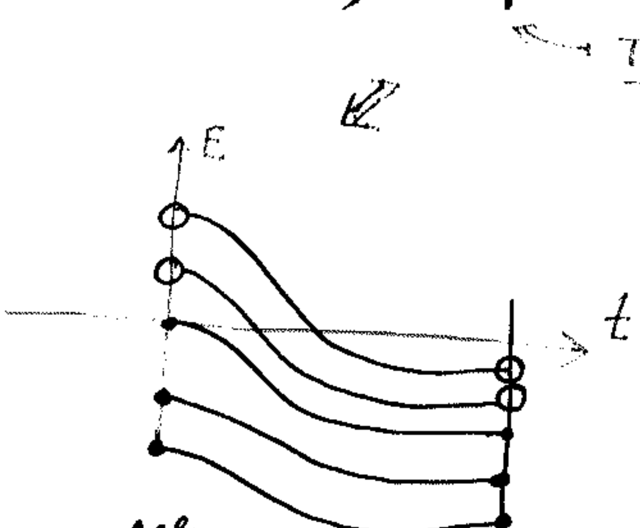
Приобретают энергию

$\cdot\, L \to P$

$\cdot\, \leftarrow P$

Фермионы у дираковского моря.

Теряют энергию



Левые

Родились левые дырки.

и правые фермионы

$\Downarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} N_L \text{ будет уменьшаться} \\ N_R \text{ будет увеличиваться.} \end{array}} \Rightarrow$ Либо N_f, либо Q^5 не будут сохраняться.

В калибровке $A_0 = 0$ $\boxed{E = -\dot{A}_1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_1(t) = -\int_{-\infty}^{t} E\, dt}$$

$$A_1\big|_{t\to+\infty} = -\mu$$

$$\boxed{E_n = -p_n} = \frac{2\pi n}{L}$$

$$+i\partial_0\xi + i(\partial_1 - iA_1)\xi = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\xi = \xi_0 \exp\left\{ip_n x - iE_n t + i\int_{-\infty}^{t} A_1(t')dt'\right\}}$$

$$i\xi_0\left(-i\cancel{E_n} + i\cancel{A_1(t)}\right) + i(\cancel{ip_n})\xi_0 - \cancel{A_1}\xi_0 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \xi = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{-iE_n(t+x) + i\int_{-\infty}^{t} A_1(t')dt'\right\} \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{-iE_n(t-x) + i\int_{-\infty}^{t} A_1(t')dt'\right\} \end{array}}$$

$$\boxed{t \to +\infty} \Rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{-iE_n(t+x) - i\mu t + const\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-i(E_n + \mu)t - iE_n x\right\}$$

$$\eta \propto \exp\left\{-i(E_n + \mu)t + iE_n x\right\}.$$

IV

$$\boxed{\begin{aligned} E_L(t_f) &= E_n - \mu \\ E_R(t_f) &= E_n + \mu \end{aligned}}$$

Импульс не совпадает с энергией $\mapsto$ Так как есть ненулевой $A_1 = \mu$.

Но: можно $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha$ =

$\boxed{\alpha = \mu \cdot x}$ $\quad A_0 \mapsto 0$

$\quad A_1 \mapsto \mu - \mu = 0$

$$\Psi \mapsto \Psi e^{+i\alpha} = \Psi e^{+i\mu x}.$$

$$D_\mu \Psi \mapsto \cancel{+i\partial_\mu\alpha\,\Psi} + \underbrace{\partial_\mu \Psi - i A_\mu \Psi} - \cancel{i\,\partial_\mu \alpha\, \Psi} \quad \text{ok}$$

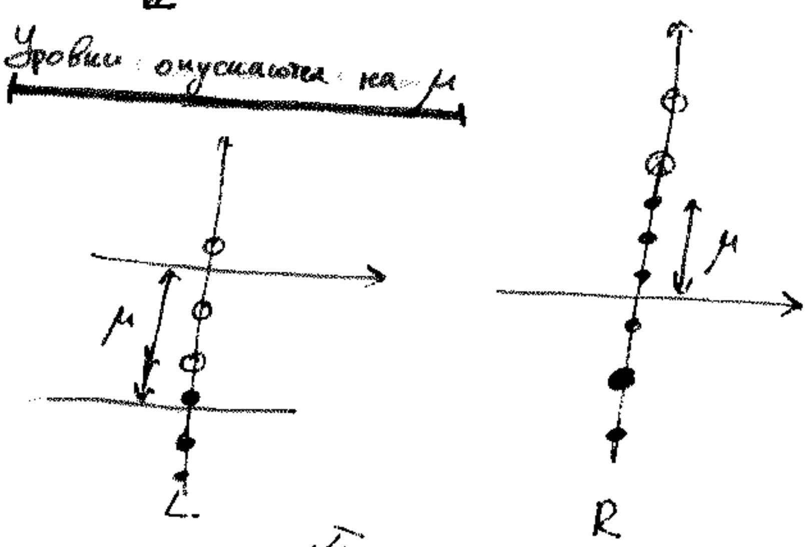
$$\boxed{\Psi\big|_{gauged} = \Psi e^{-i\mu x}}$$

$$\xi\big|_{gauged, f} \propto \exp\{-i(E_n-\mu)t - iE_n x + i\mu x\}$$
$$\propto \exp\{-i(t+x)(E_n-\mu)\}$$

$$\zeta\big|_{gauged, f} \propto \exp\{-i(E_n+\mu)t + iE_n x + i\mu x\}$$
$$\propto \exp\{-i(t-x)(E_n+\mu)\}.$$

VI

Уровни опускаются на μ



$\Downarrow$

$\boxed{\Delta N_R = -\Delta N_L}$ $\quad \Rightarrow \quad N_f = N_L + N_R = \text{const}$

$$\boxed{\Delta Q_5 = -2\Delta N_R}$$

ΔN_R : $E_n = \frac{2\pi N_R}{L}$ μ

$$\boxed{\Delta N_R = \left[\frac{\mu L}{2\pi} \right]}$$

Перепишем равенство $\Delta N_R = + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, E \int_0^L dx \, \frac{1}{2\pi}$

$$E = -\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0 = F_{10}$$

$$\boxed{\Delta N_R = -\frac{1}{2\pi} \int dx \, dt \, \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}$$

$$\boxed{\Delta Q^5 = + \frac{1}{2\pi} \int dx \, dt \, \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}$$

Замечания: Этот процесс $\mapsto$ Аномальное рождение фермион / антифермионных пар

Только: $m=0 \Rightarrow$ нет экспоненциального подавления

$\int dx \, dt \, \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ — Топологическое число конфигурации поля.

Полная производная $\Rightarrow$ на конфигурациях поля A_μ, спадающих [на ∞, равна 0]

Мы получили ответ для постоянного эл. поля $E(t)$

Понятно, что если E медленно зависит от x, ответ не меняется.

Замечание: $\exists$ ограничение, налагаемое на μ

$A \mapsto A_1$ — тоже вакуум.

$\Downarrow$

$e^{i\alpha(x)}$ — периодическая ф-ция

$$e^{i\mu L} = 1 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{2\pi m}{L}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta N_R \text{ - целое}}$$

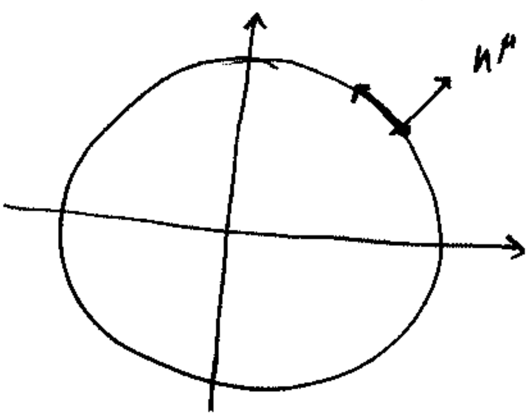
$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^L A_1(x)\,dx$$ — Топологическое число вакуума

$$A_1 = \partial_\mu \alpha_0 \Rightarrow n = \frac{1}{2\pi}\left[\alpha_0(L) - \alpha_0(0)\right] = n$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi n}{L} x}$$

Если есть конфигурация $A_\mu(x)$, то у неё есть топологическое число

$$q = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\, \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$



$r \mapsto \infty \Rightarrow A_\mu \mapsto \partial_\mu \alpha$

Евклид

$$\boxed{S^1 \mapsto S^1}$$

$$q = \int_0^{2\pi} \partial_\varphi \alpha\, d\varphi \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx^\mu \partial_\mu \alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint dx^\mu A_\mu = \frac{1}{2\pi}\int dn_\mu \epsilon^{\mu\nu} A_\nu$$

$$q = \frac{1}{2\pi}\int dt\,dx\,\underbrace{\left[\epsilon^{10}\partial_1 A_0 + \epsilon^{01}\partial_0 A_1\right]}_{F_{01}} =$$

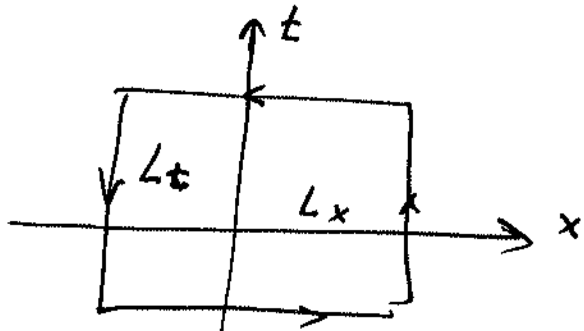
$$= \frac{1}{4\pi}\int dt\,dx\; F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Это есть топ. заряд конфигурации, которая} \mapsto \text{вакуум при } t \mapsto \pm\infty}$$

Но с другой стороны

пусть $\boxed{\begin{array}{l} L_x \mapsto \infty \\ L_t \text{ - конечна} \end{array}}$



$$\boxed{q = \frac{1}{2\pi}\int_0^L dx\, A_1\Big|_{t_f} - \frac{1}{2\pi}\int_0^L dx\, A_1\Big|_{t_i} = Q_f - Q_i}$$

$$\Downarrow$$

Когда большая непертурбативная конфигурация $A_\mu(x,t)$ изменяет топологический заряд вакуума на q возникает в точности.

$$\Delta N_R = -q \qquad \Big| \qquad \Delta Q^5 = 2q$$
$$\Delta N_L = q$$

Откажемся от требования адиабатичности

$$\Downarrow$$

Фермионы могут перескакивать с уровня на уровень за счёт процесса Швингера.

Но: L и R фермионы полностью независимы!

$$\Downarrow$$

В результате перескоков N_L и N_R сохраняются.

создаётся какое-то кол-во фермионов и такое же кол-во дырок в море Дирака

$\Downarrow$

Общий хар-р если A_μ в вакууме в начале и конце пр-сса

Замечание 1) $A_\mu(x,t)$ – такое как надо возникает в Абелевой модели Хиггса при туннелировании

$\mapsto$ Абелев Инстантон, он же вихрь

$\Downarrow$

Туннельный переход сопр. нарушением Киральности

Либо может быть перех-д через сфалерон

2). Если мы в самом начале заметим, что ξ и ζ - независимы, и исключим ζ, то будет изменятся эл. заряд.

$\Downarrow$

$\boxed{\partial_\mu j_\mu \neq 0}$ в результате некоторых процессов.

Но: ур-ния Максвелла противоречивы если $\partial_\mu j_\mu \neq 0$

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu j_\mu$$

$\Downarrow$

~~Иначе нам будет удовлетворить обр.~~

Теория обязательно должна содержать левые и правые фермионы.

Задача 4, из 3 глав Ру.