Формула Швингера

Aoyama : Bose fields in 2D.

Schwinger's proper-time method.

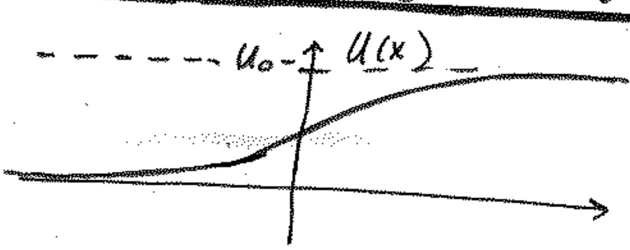
$$D=4 \qquad F: \quad 2\,\mathrm{Im}\,\Gamma = \frac{(eE)^2}{8\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,e^{-\frac{\pi m^2}{eE}\cdot n}$$

$$B: \quad 2\,\mathrm{Im}\,\Gamma = \frac{(eE)^2}{8\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,e^{-\frac{\pi m^2}{eE}\cdot n}$$

$$D=2 \qquad F: \quad 2\,\mathrm{Im}\,\Gamma = \frac{eE}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-\frac{\pi m^2}{eE}n} = -\frac{eE}{2\pi}\ln\left[1-e^{-\pi m^2/eE}\right]$$

$$B: \quad 2\,\mathrm{Im}\,\Gamma = \frac{eE}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,e^{-\frac{\pi m^2}{eE}\cdot n} = \frac{eE}{2\pi}\ln\left[1+e^{-\pi m^2/eE}\right]$$

Давайте будем обобщать полученную картину



$\Psi_f(x) \mapsto$ Решение ур-ния Дирака с энергией E обеспечивающее парадокс Клейна.

$$\Psi_f \mapsto \begin{cases} \overbrace{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u_p\,e^{ipx}}^{in} + \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u_{-p}\,e^{-ipx}, & x\mapsto -\infty \\ \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,\frac{T}{R}\,v_k\,e^{ikx}}_{in}, & x\mapsto +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_k = eU_0 - E}$$

$$\Psi_h \mapsto \begin{cases} \left(-\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,\frac{\bar{T}'}{R'}\,u_p\,e^{ipx}\right)_{in}, & x \mapsto -\infty \\ \left(\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,\frac{1}{R'}\,v_k\,e^{ikx}\right)_{in} + \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,v_{-k}\,e^{-ikx}, & x \mapsto +\infty \end{cases}$$

$$\Phi_f \longmapsto \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u_p\,e^{ipx} + \left(e^{-ipx}(\ldots)\right)_{out}, & x \mapsto -\infty \\ \left(e^{-ikx}(\ldots)\right)_{out}, & x \mapsto +\infty \end{cases}$$

$$\Phi_h \mapsto \begin{cases} \left(e^{-ipx}(\ldots)\right)^{out}, & x \mapsto -\infty \\ v_k\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,e^{ikx} + \left(e^{-ikx}(\ldots)\right)_{out}, & x \mapsto +\infty \end{cases}$$

Введём S - матрицу :

$$\begin{cases} \Psi_f = \frac{1}{R}\,\Phi_f + \frac{\bar{T}}{R}\,\Phi_h \\ \Psi_h = \text{[redacted]} - \frac{\bar{T}'}{R'}\,\Phi_f + \frac{1}{R'}\,\Phi_h \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_f \\ \Psi_h \end{pmatrix} = \hat{S}\begin{pmatrix} \phi_f \\ \phi_h \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{Общее определение } S\text{-матрицы}$$

$$\boxed{\hat{S} = \begin{pmatrix} 1/R & \bar{T}/R \\ -\bar{T}'/R' & 1/R' \end{pmatrix}}$$

Установим нормировку состояний

Главная мысль: 1) $\int \psi_E^+(x)\,\psi_{E'}(x)\,dx = 0$ при $E \neq E'$

$\Downarrow$

Гамильтониан эрмитов

2) $\int \psi_E^+ \psi_E\, dx$ ← Должна расходиться при $E = E'$,

т.к.

Устранимая особенность в смысле обобщённых ф-ций не меняет ф-цию.

$\Downarrow$

Мы должны вычислить инт-лы при $E \mapsto E'$ и забить на все конечные куски.

$$\int \Psi^+_{fE}(x)\,\psi_{hE'}(x)\,dx\Big|_{E'\mapsto E} =$$

$$= \underbrace{\int_{-L}^{L}\psi^+_{fE}(x)\,\psi_{hE'}(x)\,dx}_{\text{finite}} + \int_{-\infty}^{-L}dx\,\frac{1}{R^*}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u_p^+ e^{-ipx}\times$$

$$\times\left(-\sqrt{\frac{\omega_p'}{p'}}\,\frac{\bar{T}'}{R'}\right)u_{p'}\,e^{ip'x} + \int_{-\infty}^{-L}dx\,\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u^{*+}_{-p}\,e^{ipx}\times$$

$$\times\left(-\sqrt{\frac{\omega_p'}{p'}}\,\frac{\bar{T}'}{R'}\,u_{p'}\right)e^{ip'x} \longmapsto \text{finite} \quad \int e^{i(p+p')x}.$$

$$+\int_L^{+\infty} dx \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,\frac{\bar{T}^*}{R^*}\,v_k^+\,e^{-ikx} \times \sqrt{\frac{\omega_k'}{k'}}\,\frac{1}{R'}\,v_{k'}\,e^{ik'x} +$$

$$\underbrace{+\int_L^{+\infty} dx \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,\frac{\bar{T}^*}{R^*}\,v_k^+\,e^{-ikx} \times \sqrt{\frac{\omega_k'}{k'}}\,v_{-k'}\,e^{-ik'x}}_{\text{Конечная часть.}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-0} dx\; e^{ix(p'-p)}\right)\left(-\frac{\omega_p}{p}\right)\frac{\bar{T}'}{R'R^*} +$$

$$+\left(\int_0^{\infty} dx\; e^{ix(k'-k)}\right)\frac{\omega_k}{k}\,\frac{\bar{T}^*}{R'R^*} = 0$$

$\boxed{\text{По з-ну сохранения тока}}$

$$k' - k = \frac{dk}{dp}(p'-p) = (p'-p)\left(-\frac{\omega_k}{k}\frac{p}{\omega_p}\right).$$

$$k = \sqrt{\omega_k^2 - m^2}$$

$$\frac{dk}{dp} = \frac{dk}{d\omega_k}\,\frac{d\omega_k}{dp} = -\frac{\omega_k}{k}\,\frac{p}{\omega_p}$$

$$\omega_k = eU_0 - E = eU_0 - \omega_p$$

$$\int \Psi_{f,E}^+(x)\,\Psi_{h,E'}(x)\,dx\Big|_{E'\mapsto E} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\left(x\cdot\cancel{\left(\frac{\omega_k}{k}\frac{p}{\omega_p}\right)}\right) e^{ix(p'-p)}\left(-\frac{\omega_p}{p}\right)\frac{\bar{T}'}{R'R^*} +$$

$$+\int_{-\infty}^{-0} d\underbrace{\left(x\cdot\left(-\frac{\omega_k}{k}\right)\frac{p}{\omega_p}\right)}_{x'} e^{ix'(p'-p)}\left(+\frac{\cancel{k}}{\cancel{\omega_k}}\,\frac{\omega_p}{p}\right)\frac{\cancel{\omega_k}}{\cancel{k}}\,\frac{\bar{T}^*}{R'R^*}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{0} dx \; e^{ix(p'-p)}\right) \frac{\omega_p}{p} \frac{1}{R'R^*} \left(\overline{T}' - \overline{T}^*\right)$$

$$\tilde{j} = \Psi_f^+ \alpha \Psi_h$$

$$\boxed{E\Psi = \hat{H}_D \Psi} \qquad \boxed{H_D = -i\alpha\partial_x + \beta m + eU_0}$$

$$\partial_x \tilde{j} = \partial_x \Psi_f^+ \alpha \Psi_h + \Psi_f^+ \alpha \partial_x \Psi_h$$

$$-i\alpha\partial_x \Psi_h + \beta m \Psi_h + eU_0 \Psi_h = E\Psi_h$$

$$-i\alpha\partial_x \Psi_f + \beta m \Psi_f + eU_0 \Psi_f = E\Psi_f$$

$$i\partial_x \Psi_f^+ \alpha + \Psi_f^+ \beta m + \Psi_f^+ eU_0 = E\Psi_f^+$$

$$\partial_x \bar{j} = \cancel{-\frac{1}{i}\Psi_f^+ \beta m \Psi_h} + \cancel{\frac{1}{i}(E - eU_0)\Psi_f^+ \Psi_h} +$$

$$+ \cancel{\left(+\frac{1}{i}\right)\Psi_f^+(+\beta m)\Psi_h} + \cancel{\left(-\frac{1}{i}\right)\Psi_f^+(E - U_0)\Psi_h} = 0$$

$$(\tilde{j})\Big|_{x \mapsto +\infty} = \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{\overline{T}^*}{R^*} v_k^+ \cancel{e^{-ikx}} \times \alpha$$

$$\times \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{1}{R'} v_k \cancel{e^{ikx}}$$

$$v_k^+ \alpha v_{-k} = N_k N_{-k} \left(\omega_k + k, \; -m\right) \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_k - k \\ -m \end{pmatrix}}_{\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} = \cancelto{0}{N_k N_{-k}\left(\omega_k^2 - k^2 - m^2\right)}$$

$$\tilde{j}\big|_{x\to+\infty} = \frac{\omega_k}{k}\left(-\frac{k}{\omega_k}\right)\frac{\bar{T}^*}{R^* R'} = -\frac{\bar{T}^*}{R^* R'}$$

$$v_k^+ \alpha v_k = \frac{1}{\cancel{2}\omega_k(\omega_k+k)}\left[\cancel{-\omega_k^2} + k^2 + \cancel{m^2} - \cancel{2}k\omega_k\right) = -\frac{k}{\omega_k}$$

$$\tilde{j}\big|_{x\to-\infty} = \frac{1}{R^*}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_p^+ \cancel{e^{-ipx}}\, \alpha\, (-)\frac{\bar{T}'}{R'}\, u_p \cancel{e^{ipx}} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}} =$$

$$= -\frac{\bar{T}'}{R^* R'}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{T}' = \bar{T}^*} \quad \boxed{|R'| = |R|}$$

Из з-на сохранения тока

$$\hat{S}^+ = \begin{pmatrix} 1/R^* & -\bar{T}'^*/R'^* \\ \bar{T}^*/R^* & 1/R'^* \end{pmatrix} \qquad \hat{S} = \begin{pmatrix} 1/R & \bar{T}/R \\ -\bar{T}'/R' & 1/R' \end{pmatrix}.$$

$$\hat{S}^+\hat{S} = \begin{pmatrix} 1/|R|^2 + |\bar{T}'|^2/|R'|^2 & \underbrace{\frac{\bar{T}}{|R|^2} - \frac{\bar{T}'^*}{|R|^2}}_{\to 0} \\ \underbrace{\frac{\bar{T}^*}{|R|^2} - \frac{\bar{T}'}{|R'|^2}}_{\to 0} & \frac{|\bar{T}|^2}{|R|^2} + \frac{1}{|R'|^2} \end{pmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

S - Матрица унитарна из з-ну сохранения тока

~~S-матрица унитарна во всех порядках ... вероятности~~

~~[illegible]~~ Унитарность S-матрица эквивалентна сохранению вероятности.

Итак, S-матрица имеет след. вид

$$\boxed{\hat{S} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 1 & \bar{T} \\ -\bar{T}^* e^{i\delta} & e^{i\delta} \end{pmatrix}}$$

Всё остальное 2-ричное квантование остаётся неизменным:

$$\boxed{\begin{aligned} |\alpha| &= 1/|R| \\ |\beta| &= |\bar{T}|/|R| \end{aligned}}$$

← Коэффициенты Боголюбова.

$$P_2 = \frac{|\bar{T}|^2}{|R|^2}$$

← Вероятность аннигиляции

$$j_f = \frac{dN_f}{dt} = \frac{P_2}{2\pi}\, d\omega_f = j_h = \frac{P_2}{2\pi}\, d\omega_k$$

Ток рождённых ч-ц

$\Downarrow$

Нужно найти ~~[illegible]~~ одно решение Ψ_f

$$\Psi_f = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

$$-i\alpha\,\partial_x\Psi + m\beta\Psi + eU_0\Psi = E\Psi.$$

$$-i\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = -(eU_0-E)\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

$$i\xi' + m\eta = -(eU_0-E)\xi \Rightarrow \boxed{\eta = -\frac{i}{m}\xi' - \frac{1}{m}(eU_0-E)\xi}$$

$$-i\eta' + m\xi = -(eU_0-E)\eta$$

$$-\cancel{+i}\,\partial_x\left(+\frac{1}{m}\xi'\right) + i\left(\partial_x\left(+\frac{1}{m}\right)(eU_0)\right)\xi + \cancel{i\left(\partial_x\left(+\frac{1}{m}\right)\xi'\right)}(eU_0-E) +$$

$$+ m\xi = \cancel{+(eU_0-E)\left(+\frac{i}{m}\xi'\right)} + \frac{1}{m}(eU_0-E)^2\xi$$

$$\boxed{-\xi'' + \xi\left[ieU_0' + m^2 - (eU_0-E)^2\right] = 0}$$

Формула Швингера получается в пределе когда

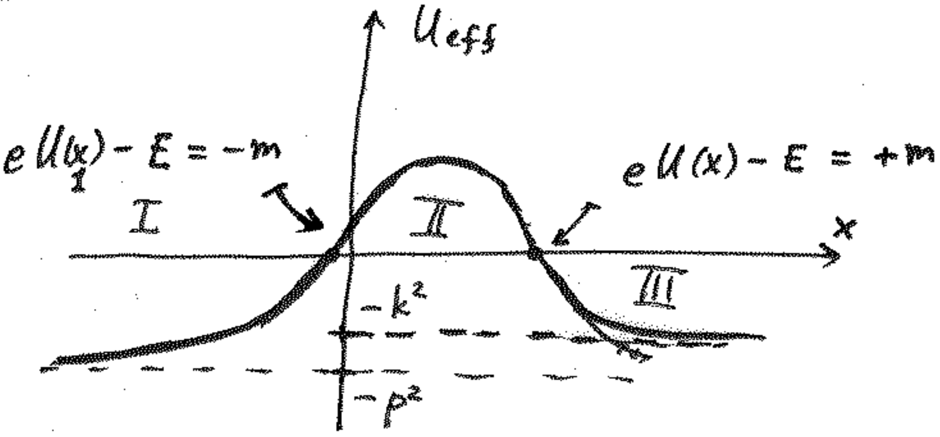
U медленно меняется

$\boxed{\frac{U'}{U} \ll m}$ $\boxed{E, U \sim m}$ Масса большая

$$\left.\begin{aligned} U(x) &= m\tilde{u}(x)\\ E &= m\tilde{E}\end{aligned}\right| \Rightarrow -\frac{1}{m^2}\xi'' + \xi\left[\frac{ie}{m}\tilde{U}_0' + 1 - (e\tilde{U}_0 - \tilde{E})^2\right] = 0$$

Верна Квазиклассика

$$\boxed{U_{eff} = m^2 - (eU(x)-E)^2}$$



$x \mapsto -\infty \Rightarrow U_{eff} = m^2 - E^2 = -p^2$

$U_{eff} = 0 \Rightarrow \quad m^2 = (eU(x) - E)^2$

$$\Downarrow$$

$eU(x) - E = \pm m$ ⟵ Точки поворота

$x \mapsto +\infty$

Решаем квазиклассическую задачу о туннелировании через потенциальный барьер!

I: $\boxed{\xi = A e^{\pm i W(x)}}$ $\qquad W(x) = \int_{x_1}^{x} q(x)\, dx$

$$\boxed{q(x) = \int_{x_1}^{x} dx \sqrt{-U_{eff}}}$$

$\oplus$ $\qquad \xi' = (A' + AiW')e^{iW}$

$\xi'' = (\cancel{A''} + 2A'iW' + AiW'')e^{iW}$ + Main part

$+2iA'W' + iAW'' - ieU_0'A = 0.$

$$\boxed{\omega_q(x) = E - eU_0}$$

$$\boxed{A = c\,\frac{\sqrt{\omega_q(x) - q(x)}}{\sqrt{q(x)}}} = c\,\frac{\sqrt{\omega_q(x)}}{\sqrt{q(x)}}\;\frac{m}{\sqrt{2\omega_q(x)\,(\omega_q(x) + q(x))}}$$

$$\cancel{-\frac{2q(x)}{2q^{3/2}}\sqrt{\omega_q - q}\;q'} + \frac{2q(x)^{1/2}}{2\sqrt{\omega_q - q}}\;\frac{(\omega_q' - q')}{\cancel{\sqrt{q}}} +$$

$$+\cancel{\frac{\sqrt{\omega_q - q}}{\sqrt{q}}\;q'} - eU_0'\,\frac{\sqrt{\omega_q - q}}{\sqrt{q}} = 0$$

$$\cancel{q(x)\left(-eU_0' + \frac{\omega_q}{q}(+eU_0')\right) - eU_0'(\omega_q - q) = 0}$$

ok

<u>Задача</u> Получить решение для $\eta(x)$.

Показать, что оно также придет в виде свободного решения, где $p \mapsto q(x)$.

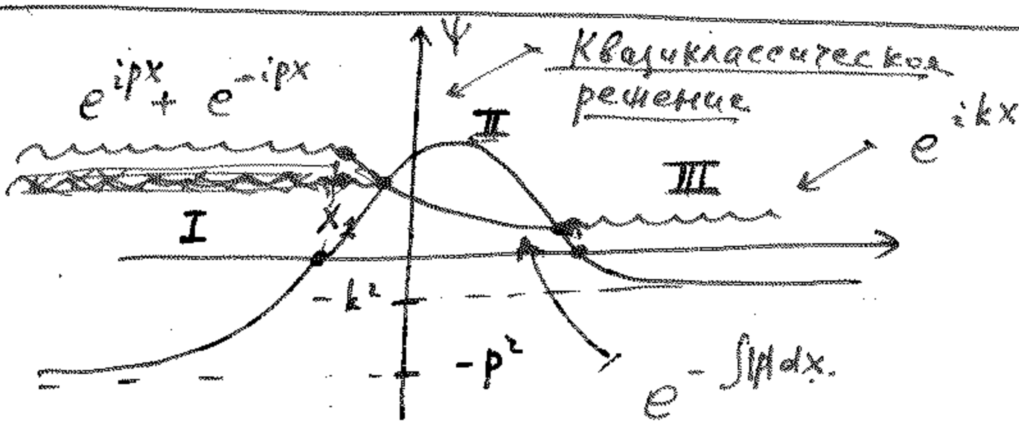
Показать, что граничусловие при $x \mapsto -\infty$ выполняются автоматически

Сшиваем с изначальным решением при $x \mapsto -\infty$

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= 1/R \\ C_2 &= 1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} q(x) &\mapsto p. \\ \omega_q(x) &\mapsto \omega_p \end{aligned}}$$

$$\xi(x) = \frac{1}{R}\,\frac{\sqrt{\omega_q(x)-q(x)}}{\sqrt{q(x)}}\, e^{i\int_{x_1}^{x} q(y)\,dy + i\pi/4} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\omega_q(x)+q(x)}}{\sqrt{q(x)}}\, e^{-i\int_{x_1}^{x} q(y)\,dy - i\pi/4}.$$



Если мы хотим получить ~~убывающую~~ только одну экспоненту справа, то должны оставить только убывающую экспоненту под барьером. $\Longrightarrow$ $\cos(px + \pi/4)$ слева

$\Downarrow$

$$\boxed{R = 1}$$

$$\xi_{II} = [redacted]\; \frac{\sqrt{\omega_q(x)-q(x)}}{\sqrt{|q(x)|}}\, e^{-\int_{x_1}^{x} |q(x')|\,dx'}$$

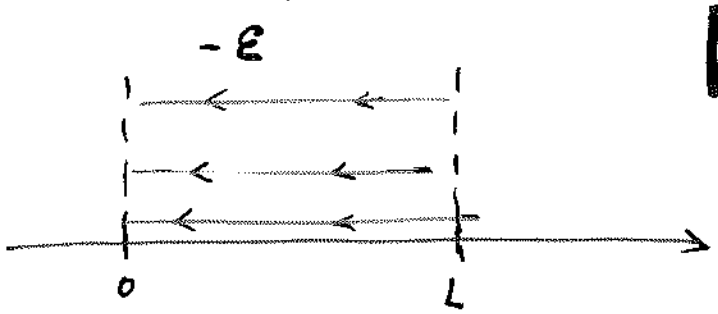
$$\xi_{III} = e^{-\frac{i\pi}{4}}\, \frac{\sqrt{\omega_q(x)-q(x)}}{\sqrt{q(x)}}\, e^{-\int_{x_1}^{x_2} dx'\,|q(x')|}\, e^{i\int_{x_2}^{x} p(x)\,dx}$$

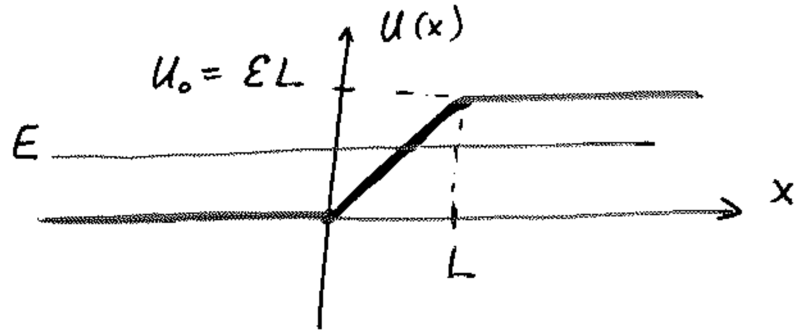
$\Downarrow$

$$\boxed{T = e^{-\int_{x_1}^{x_2} dx'\,|q(x')|}}$$

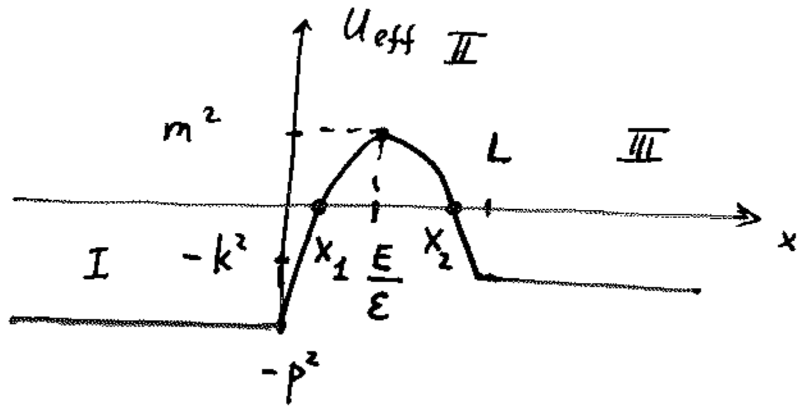
Пример Формула Швингера

$$\boxed{U = \mathcal{E} x} \qquad \boxed{e = 1}$$





$$U_{eff} = m^2 - (\mathcal{E}x - E)^2$$



II: $\quad U_{eff} = m^2 - (\mathcal{E}x - E)^2$

$$\frac{dU_{eff}}{dx} = 0 \Leftrightarrow -2\mathcal{E}(\mathcal{E}x - E) = 0 \Leftrightarrow x_m = \frac{E}{\mathcal{E}}$$

$$-k^2 = m^2 - (\mathcal{E}L - E)^2 \qquad \boxed{k = \sqrt{(U_0 - E)^2 - m^2}}$$

$$(U_{eff})_m = m^2 - \left(\frac{\cancel{\mathcal{E}}E}{\cancel{\mathcal{E}}} - E\right)^2 = m^2$$

x_i: $\quad U_{eff} = 0 \Rightarrow m^2 = (\mathcal{E}x - E)^2$

$$\mathcal{E}x_1 - E = -m$$

$$\boxed{x_1 = \frac{E - m}{\mathcal{E}}} \quad \boxed{x_2 = \frac{E + m}{\mathcal{E}}}$$

$$|p(x)| = \sqrt{-U_{eff}(x)} = \sqrt{m^2 - (\mathcal{E}x - E)^2}$$

$$T = \exp\left\{ -\int_{x_1}^{x_2} dx\, m \sqrt{1 - \left(\frac{\mathcal{E}x - E}{m}\right)^2} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -m \int_{-1}^{1} d\underbrace{\left(\frac{\mathcal{E}x - E}{m}\right)}_{y} \frac{m}{\mathcal{E}} \sqrt{1 - y^2} \right\} =$$

$y = \sin\Psi$

$$= \exp\left\{ -\cancel{2}\frac{m^2}{\mathcal{E}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\Psi\, d\Psi\, \cancel{\cos\Psi} \right\}$$

$$\cos^2\Psi = \frac{1 + \cos 2\Psi}{\cancel{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\Psi)\Big|_0^{\pi/2} \to 0$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\bar{T} = \exp\left\{ -\frac{\pi m^2}{2\mathcal{E}} \right\}}$$

$$\boxed{P_2 = \frac{|\bar{T}|^2}{|R|^2} = \exp\left\{ -\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}} \right\}}$$

$$\boxed{\omega_p = U_0 - \omega_k}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{d\omega_p = d\omega_k}$$

Вероятност аннигиляции

$$\boxed{\dot{p}_f = \frac{1}{2\pi} \boxed{d\omega_p} \exp\left\{ -\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}} \right\}} = \frac{dN_f}{dt}$$

$$\| \quad \frac{1}{\cancel{2} \cdot 2\pi} \text{[illegible]}\, dE \quad \exp\left\{ -\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}} \right\}$$

$\Downarrow$

$$\frac{dN_f}{dt} = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}} \right\} \int_0^{U_0 = \mathcal{E}L} dE$$

$$\mathcal{E}L$$

$$\boxed{\frac{dN_f}{dt\,dL} = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}}\right\}}$$

Формула Швингера для вер-ости рождения пар в ед. времени

Формула Швингера в $D=4$

$$\boxed{\frac{dN_f}{dt\,dV} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi^3}\, e^{-\frac{\pi m^2}{\mathcal{E}}}}$$

Задача. Повторить вывод ф-лы Швингера другим способом.

Рассмотреть точечную ч-цу с действием

$$S = -m\int ds + \int A_\mu dx^\mu$$

в постоянном электрическом поле. Найти отскок, описывающий рождение e^+e^--пар.
Вычислить главную экспоненту подавления вероятности рождения пар.

Решение

$$S = -m\int dt\sqrt{1-\left(\frac{dX}{dt}\right)^2} - \int dt\, \mathcal{E}\cdot X$$

Евклид. $\boxed{t = -i\tau}$

$$S = +m\int i\,d\tau\sqrt{1+\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2} + \int i\,d\tau\, \mathcal{E}\cdot X(\tau) =$$

$$= i S_E$$

$$\boxed{S_E = m\int d\tau\sqrt{1+\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2} + \int d\tau\, \mathcal{E} X(\tau)}$$

$$E = \frac{\partial L_M}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L =$$

$$= + \frac{m \cancel{2} \dot{x}^2}{\cancel{2}\sqrt{1-(\dot{x})^2}} + m\sqrt{1-(\dot{x})^2} - \varepsilon x =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-(\dot{x})^2}} - \varepsilon x$$

$$\boxed{E_E = \frac{m}{\sqrt{1+(\dot{x})^2}} - \varepsilon x}$$

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\frac{dx}{d\tau}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}}\right) + \varepsilon = 0$$

$$+\dot{x}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\frac{dx}{d\tau}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}}\right) = \varepsilon \dot{x}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{\sqrt{1+(\dot{x})^2}}\right) = -\frac{m\cancel{2}\dot{x}\ddot{x}}{\cancel{2}\left(1+(\dot{x})^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{m\dot{x}\ddot{x}(1+(\dot{x})^2)}{(1+(\dot{x})^2)^{3/2}} - \cancel{\frac{m(\dot{x})^2 \cancel{2}\dot{x}\ddot{x}}{\cancel{2}(1+(\dot{x})^2)^{3/2}}} = \varepsilon \dot{x}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m}{\sqrt{1+(\dot{x})^2}}\right)$$

Нас интересует отскок $\Rightarrow$ $\boxed{E=0}$

$$\frac{m}{\sqrt{1+(\dot{x})^2}} = \varepsilon x$$

$$\frac{m^2}{\cancel{1+(\dot{x})^2}} = \varepsilon^2 x^2 \left(1+(\dot{x})^2\right)$$

$$\frac{m^2}{\varepsilon^2 x^2} = 1 + \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{m^2}{\varepsilon^2 x^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx\, x}{\sqrt{\frac{m^2}{\varepsilon^2 \cancel{x^2}} - x^2}} = \text{[redacted]}\ \tau - \tau_0$$

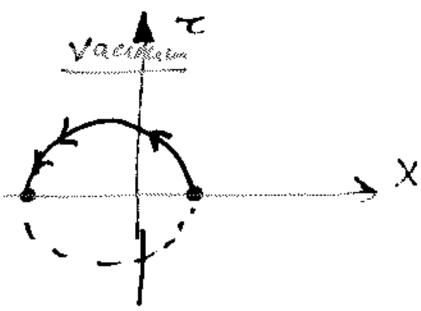
$$\frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{\varepsilon}{m} \quad \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)}{\sqrt{1-x^2\frac{\varepsilon^2}{m^2}}} = \tau - \tau_0 .$$

$$+ \frac{m^2}{\text{[redacted]}\varepsilon^2}\left(\cancel{\sqrt{\ }}\, 1 - x^2\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right) = (\tau - \tau_0)^2$$

$$\frac{\varepsilon^2}{m^2}\left(x^2 + (\tau-\tau_0)^2\right) = 1$$

Возьмём $\tau_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 + \tau^2 = \frac{m^2}{\varepsilon^2}}$

$\Downarrow$



Рождение из вакуума

$$\boxed{P = e^{-\text{[redacted]}S_B}}$$

$$S_B = +m\int_0^{2\pi} \boxed{\frac{m}{\varepsilon}}\, d\varphi \sqrt{1} \ \text{[redacted]} \cancel{\int_0^{2\pi}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2}\cos\varphi\, d\varphi\right)}$$

$$= \frac{\text{[redacted]}\ \pi m^2}{\varepsilon} \qquad - \frac{m^2}{\varepsilon}\pi$$

Дискретные симметрии уравнения Дирака в $D=2$

$\boxed{CPT}$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0.$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\tau_2$$

$$\boxed{\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau_3$$

P - симметрия. $\Psi(x,t)$ - удовлетворяет ур-ю Дирака

$$\Downarrow$$

$$\Psi^P(x,t) = P\Psi(-x,t)$$

← Потребуем чтобы удовлетворяла ур-ю Дирака.

$$i\gamma^0 P\partial_0\Psi - i\gamma^1 P\partial_x\Psi = mP\Psi$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} P^{-1}\gamma^0 P &= \gamma^0 \\ P^{-1}\gamma^1 P &= -\gamma^1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{P = \gamma^0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Psi^P(x,t) = \gamma^0\Psi(-x,t)}$$

~~T - симметрия~~ ~~Аналогично:~~

$$\left.\begin{aligned} T^{-1}\gamma^0 T &= -\gamma^0 \\ T^{-1}\gamma^1 T &= \gamma^1 \end{aligned}\right]$$

$$= i\gamma^1\Psi(x,-t)$$

Задача 1: Показать, что

$$j^P = -j(-x,t)$$

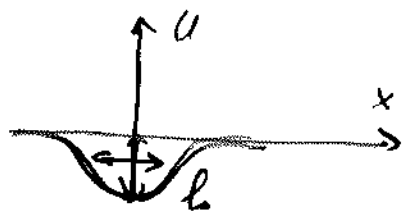
$$\rho^P = \rho(-x,t)$$

Решение $j^P = \psi^{P+}\alpha\psi^P = \psi^{P+}\gamma^0\gamma^1\psi^P = \psi^+_{-x}\cancel{\gamma^0}\cancel{\gamma^0}\gamma^1\gamma^0\psi_{-x} =$

$$= -j(-x)$$

$$\rho^P = \psi^{P+}\psi^P = \rho(-x)$$

Задача 2: Пусть $\Psi_0(x)$ основной уровень в потенциале $U(x)$



$U_0 < 2m$

Сконструировать приближённо ВФ 2-х низших уровней в пот-ле

$$V(x) = U(-x+L) + U(x+L)$$

$L \gg$ ширина $U(x)$

Решение $\Psi^{(S)P}(x) = \Psi^{(S)}(x)$

$$\Psi^{(S)}(x) = \hat{A}\,\Psi_0(x+L) + \hat{B}\,\Psi_0(-x+L)$$

$$\psi^{(S)P}(x) = \gamma^0\hat{A}\,\Psi_0(-x+L) + \gamma^0\hat{B}\,\Psi_0(-x+L)$$

$$\boxed{\Psi^{(S)}(x) = \Psi_0(x+L) + \gamma^0 \Psi_0(L-x)}$$

$$\boxed{\Psi^{(A)}(x) = \Psi_0(x+L) - \gamma^0 \Psi_0(-x+L)}$$

C-симметрия Постулируем: $\boxed{\Psi^c(x,t) = C\Psi^*(x,t)}$

$$-i\gamma^{0*}\partial_0\Psi^* - i\gamma^{1*}\partial_1\Psi^* = m\Psi^*$$

$$\boxed{C^{-1}\gamma^{\mu *}C = -\gamma^\mu}$$

$\boxed{C=\tau^3}$ $\quad \tau^3\tau^1\tau^3 = -\tau^1$, $\quad \tau^3 i\tau^2\tau^3 = -i\tau^2$ | ok

Задача 1) Показать, что [redacted] $j^c = j$ $\quad \rho^c=\rho$

2) Показать, что $u^c(p) = v(-p)$ [$v^c_p = u_{-p}$.

Решение $\rho^c = \psi^{c+}\psi^c = \psi^T C^+ C\psi^* = \psi^+\psi$.

$(\psi^c)^+ = \psi^T C^+$

$$j^c = \psi^{c+}\alpha\psi^c = \psi^T C^+\gamma^0\gamma^1 C\psi^* =$$

$\boxed{C\,C^+}$ $\quad \gamma^{0*} = -\gamma^1$, $\gamma^{1*} = \gamma^0$

$$= \psi^T\gamma^{0*}\gamma^{1*}\psi^* = \psi^+\gamma^{1+}\gamma^{0+}\psi =$$

$$= +\psi^+\gamma^0\gamma^1\psi.$$

$$u = N_p \begin{pmatrix} m \\ \omega_p+p\end{pmatrix} e^{ipx}$$

$$u^c = -\cancel{\tau^3}\; N_p \begin{pmatrix}-m\\ +\omega_p + p\end{pmatrix} =$$

$$= [redacted] \frac{+1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p+p)}}\frac{m}{\omega_p-p}\begin{pmatrix}+m(\omega_p-p)\\ -m^2\end{pmatrix} = \overbrace{N_{-p}\begin{pmatrix}\omega_p-p\\-m\end{pmatrix}}^{v_{-p}} \quad \text{ok}$$

$\underline{\text{T-симметрия}}$ $\boxed{\psi^T = T\Psi^*(x,-t)}$

$$i\gamma^0\partial_0\Psi + i\gamma^1\partial_1\Psi = m\Psi$$

$$-i\gamma^{0*}\partial_0\Psi^* - i\gamma^{1*}\partial_1\Psi^* = m\Psi^*$$

$$\begin{bmatrix} T\gamma^{0*} = +\gamma^0 T \\ T\gamma^{1*} = -\gamma^1 T \end{bmatrix}. \Rightarrow \boxed{T = \tau^1}$$

Задача (Объяснение, откуда $*$)

Показать, что $U_p^T = U_{-p}$. $\quad v_p^+ = v_{-p}$.

Что было бы если бы мы нашли симметрию $\psi^{T'} = T'\Psi(x,-t) \leftarrow$ Найти T' и показать, что $\boxed{U_p^{T'} = ?}$

Решение: $U_p^T = N_p \gamma_0 \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p \end{pmatrix} =$

$$= U_{-p}$$

$$\psi^T(x,t) = \tau^1\Psi^*(x,-t)$$

$$\Psi^{PT}(x,t) = \cancel{\tau^1\tau^1}\Psi^*(-x,-t)$$

$$\Psi^{CPT}(x,t) = \tau^3\Psi(-x,-t) =$$

Полная инверсия всех пространственных координат

$$\boxed{\psi^{CPT}(x,t) = \gamma^5\Psi(-x,-t)}$$

Теорема (**CPT** - теорема)

В любой физической теории поля (CPT) коммутирует с полным гамильтонианом.

Д-во

$$\hat{H} = \int d^3x \, \hat{\mathcal{L}}(x, \overset{\overset{0}{\|}}{t})$$

Не зависит от времени.

CPT $\leftrightarrow$ Инвертирует все $\boxed{\begin{matrix} x \mapsto -x \\ t \mapsto -t \end{matrix}}$ для физических полей

$\Downarrow$

$$\underset{\Downarrow}{H^{CPT}} = \int d^3x \, \mathcal{L}(-\vec{x}, t) = H.$$

Теория инвариантна относительно CPT
