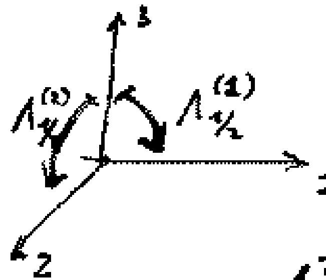
Поворот базиса матриц Дирака

$$\boxed{\Lambda^{(1)}_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + i\sigma_2\right]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\tilde{\gamma}_0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Lambda^{+(1)}_{1/2}\,\tilde{\gamma}^0\,\Lambda^{(1)}_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 .$$

Задача 1 Найти матрицу преобразования ~~поворота~~ базиса Дирака

$\gamma^0_* = \sigma^1$ $\quad \gamma^1_\# = i\sigma^2$

в базис $\gamma^0_* = \sigma_3$, $\gamma^0_\# = i\sigma_x$

Найти решение в новом базисе, пользуясь тем что-решение

$$\boxed{\tilde{\gamma}_1 = i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Lambda^{(1)+}_{1/2}\,\tilde{\gamma}_1\,\Lambda^{(1)}_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4i & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$

$$\boxed{\Lambda^{(2)}_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + i\sigma_1\right]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{(2)+}_{1/2}\,\sigma_1\,\Lambda^{(2)}_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 = \gamma^0$$

$\cancel{\Lambda_{1/2}}$

$$\Lambda^{(2)+}_{1/2}\,(-i\sigma_3)\,\Lambda^{(2)}_{1/2} = \frac{-i}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}} = +\frac{i}{4}\begin{bmatrix} 0 & -4i \\ +4i & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= i\sigma_2 = \gamma^1$$

$$\boxed{\Lambda_{1/2} = \Lambda^{(1)}_{1/2}\,\Lambda^{(2)}_{1/2}}$$

$$\Lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix} \qquad \overset{+}{\Lambda}_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

<u>Проверка</u>:

$$\overset{+}{\Lambda}_{1/2}\,\sigma_3\,\Lambda_{1/2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & -1+i \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cancel{2}-\cancel{2} & 2+2 \\ 2+2 & \cancel{2}-\cancel{2} \end{bmatrix} = \sigma_1$$

$$\overset{+}{\Lambda}_{1/2}\; i\sigma_2\,\Lambda_{1/2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & +1+i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1-i & +1+i \\ -1+i & -1+i \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \cancel{-2+2} & +2+2 \\ -2-2 & \cancel{2-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_2$$

$$u_p = e^{-i\pi/4}\,\overset{+}{\Lambda}_{1/2}\,\tilde{u}_p = e^{-i\pi/4}\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} N_+(E)\begin{pmatrix} ik \\ E-m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{2} N_+(E)\begin{bmatrix} ik\,\frac{1-i}{1+i} - (E-m)\cancel{(1+i)} \\ ik\,\frac{1-i}{1+i} + (E-m)\cancel{(1+i)} \end{bmatrix}(1+i)$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{2}i}{\cancel{2}} = -i$$

$$U_p = e^{-i\pi/4}\frac{1}{2}(1+i)\,(k-E+m)N_+\left[\begin{matrix}1\\ \dfrac{k+E-m}{\underbrace{k-E+m}_{2E(E-m)}}\end{matrix}\right]$$

$$\cancel{k^2} + 2E^2 + \cancel{m^2} - 2mE + 2k(E-m)$$

$$\cancel{k^2} - \cancel{E^2} - 2m^2 + 2Em \to 2m(E-m)$$

$$U_p = e^{-i\pi/4}\frac{1}{2}\underbrace{(1+i)}_{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}\,\frac{(k-E+m)}{m}N_+\left[\begin{matrix}m\\ \dfrac{(E+k)\cancel{(E-m)}}{\cancel{m}\cancel{(E-m)}}\end{matrix}\right]$$

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2E(E+m)}}\,\frac{k-E+m}{m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E(E+k)}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{E+P}}{\sqrt{E-m}}\,\frac{k-E+m}{m}$$

$$(k-E+m)^2 = \cancel{k^2} + 2E^2 + \cancel{m^2} \underbrace{- 2kE + 2km}_{-2k(E-m)} - 2Em =$$

$$= 2(E-k)(E-m)$$

$$\boxed{(k-E+m)^* = \sqrt{2}\,\sqrt{(E-k)(E-m)}}$$

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2E(E+k)}}\,\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{E+k}}}{\cancel{\sqrt{E-m}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sqrt{(E-k)}}\,\cancel{\sqrt{E-m}}}{\cancel{m}} = N_p$$

ok

[redacted] $k = \sqrt{(E+m)(E-m)} = \sqrt{\dfrac{E+m}{E-m}}\,(E-m)$, $\quad \dfrac{E+m}{E-m} > 1$

$\Downarrow$

$$\boxed{k > E-m}$$

$$v_p = e^{i\alpha} \Lambda^+_{1/2} \tilde{u}_p = e^{i\alpha} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & -1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} N_-(E) \begin{pmatrix} ik \\ -E-m \end{pmatrix} =$$

$$= e^{i\alpha} \frac{1}{2} N_-(E) \begin{bmatrix} \overbrace{ik(1-i)}^{k(1+i)} + (E+m)(1+i) \\ \underbrace{ik(1-i)}_{k(1+i)} - (E+m)(1+i) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{i\alpha} \frac{1}{2} (1+i) N_-(E) \begin{bmatrix} E+m+k \\ k-E-m \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\alpha = -\pi/4}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} N_-(E) (k-E-m) \begin{bmatrix} \frac{E+m+k}{k-E-m} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{k+E+m}{k-E-m} = \frac{\cancel{k^2} \overbrace{2E^2}^{2E(E+m)} \cancel{+m^2} + 2k(E+m) + 2Em}{\cancel{k^2} - \cancel{E^2} - 2m^2 - 2Em.} = \frac{2(k+E)\cancel{(E+m)}}{-2m\cancel{(E+m)}} =$$

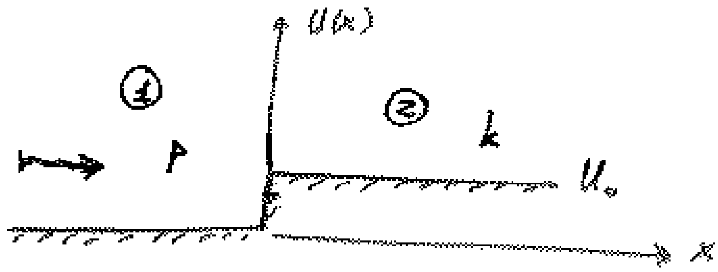
$$= -\frac{1}{m}(E+k)$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{2}} N_-(E) \left(+\frac{1}{m}\right) (E+m-k) \begin{pmatrix} E+k \\ -m \end{pmatrix}$$

$$(E+m-k)^2 = \underbrace{2E^2 + \cancel{m^2} + \cancel{k^2} + 2Em}_{2E(E+m)} - 2k(E+m) = 2(E+m)(E-k)$$

$$\boxed{E+m-k = \sqrt{2(E+m)(E-k)}}$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2E(E+m)}} \frac{1}{m} \frac{\sqrt{2(E+m)(E-k)}\sqrt{E+k}}{\sqrt{E+k}} \begin{pmatrix} E+k \\ -m \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} E - m < U_0 \\ E + m > U_0 \end{array}}$$ ← Сильное поле.

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi_1 = U_p e^{ipx} + U_{-p} e^{-ipx} R \\ \Psi_2 = v_k e^{ikx} \, T \end{array}\right.$$

$$\hat{p} \Psi_2 = k \Psi_2 \quad , \quad k > 0$$

$$\left[\begin{array}{l} i\partial_0 \Psi_2 = H_{D_2} \Psi_2 \\ H_{D_2} = -i \alpha \partial_x + m\beta + eU_0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\omega_k^2 = k^2 + m^2 = (E - eU_0)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi_1 = N_p \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p \end{pmatrix} e^{ipx} + N_{-p} \begin{pmatrix} m \\ \omega_p - p \end{pmatrix} e^{-ipx} R \\ \Psi_2 = T \, e^{ikx} \begin{pmatrix} \omega_k + k \\ -m \end{pmatrix} N_k \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l|l} (1+i) & N_p m + N_{-p} m R = T N_k (\omega_k + k) \\ (2+i) & N_p(\omega_p + p) + N_{-p}(\omega_p - p) R = T N_k (-m) \end{array}$$

$$\begin{cases} N_p(m+\omega_p+p) + R N_{-p}(m+\omega_p-p) = T N_k(-m+\omega_k+k) \\ N_p(\omega_p+p-m) + N_{-p} R(\omega_p-p-m) = -T N_k(m+\omega_k+k) \end{cases}$$

$$(m+p+\omega_p)^2 = \cancel{m^2} + \cancel{p^2} + 2\omega_p^2 + 2mp + 2m\omega_p + 2p\omega_p =$$

$2p(\omega_p+m)$

$2\omega_p(\omega_p+m)$

$$= 2(\omega_p+p)(\omega_p+m)$$

$$\boxed{m+p+\omega_p = \sqrt{2}\sqrt{\omega_p+p}\sqrt{\omega_p+m}}$$

$$N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p+p)}}$$

$$(\omega_p+p-m)^2 = 2\omega_p^2 + \cancel{p^2} + \cancel{m^2} + 2p\omega_p - 2\omega_p m - 2pm$$

$$2\omega_p(\omega_p-m) + 2p(\omega_p-m)$$

Задача 2. Вывести остальные 3 тождества.

$$\boxed{\omega_p+p-m = \sqrt{2}\sqrt{\omega_p+p}\sqrt{\omega_p-m}}$$

$$(\omega_p-p-m)^2 = 2\omega_p^2 + \cancel{p^2} + \cancel{m^2} - 2p\omega_p - 2\omega_p m + 2pm =$$

$$= 2\omega_p(\omega_p-m) - 2p(\omega_p-m)$$

$$\sqrt{p^2+m^2} < p+m$$

$$\boxed{(\omega_p-p-m) = -\sqrt{2}\sqrt{\omega_p-p}\sqrt{\omega_p-m}}$$

$$(m+\omega_p-p)^2 = \cancel{m^2} + 2\omega_p^2 + \cancel{p^2} + 2m\omega_p - 2mp - 2\omega_p p$$

$$2\omega_p(\omega_p+m) \qquad -2p(\omega_p+m)$$

$$\boxed{m+\omega_p-p = \sqrt{2}\sqrt{\omega_p-p}\sqrt{\omega_p+m}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\omega_p\cancel{(\omega_p+p)}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_p+p}}\sqrt{\omega_p+m} + \frac{R}{\sqrt{\cancel{2}\omega_p\cancel{(\omega_p+p)}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_p+p}}\sqrt{\omega_p+m} =$$

$$= T\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\omega_k\cancel{(\omega_k+k)}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_k+k}}\sqrt{\omega_k-m}$$

$$\boxed{1+R = T\frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{\omega_k}}\frac{\sqrt{\omega_k-m}}{\sqrt{\omega_p+m}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\omega_p}\cancel{\sqrt{\omega_p+p}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_p+p}}\cancel{\sqrt{\omega_p-m}} - \frac{R}{\sqrt{\cancel{2}\omega_p\cancel{(\omega_p-p)}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_p-p}}\cancel{\sqrt{\omega_p-m}} =$$

$$= -\frac{T\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{\cancel{2}\omega_k\cancel{(\omega_k+k)}}}\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\sqrt{\omega_k+k}}\frac{\sqrt{\omega_k+m}}{\sqrt{\omega_p-m}}$$

$$\boxed{1-R = -T\frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{\omega_k}}\frac{\sqrt{\omega_k+m}}{\sqrt{\omega_p-m}}}$$

$$\frac{1+R}{1-R} = -\frac{\sqrt{\omega_k-m}}{\sqrt{\omega_k+m}}\frac{\sqrt{\omega_p-m}}{\sqrt{\omega_p+m}} = -1/\varkappa$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varkappa &= \frac{\sqrt{\omega_p+m}}{\sqrt{\omega_p-m}}\frac{\sqrt{\omega_k+m}}{\sqrt{\omega_k-m}} = \\ &= \frac{k}{p}\frac{E+m}{V_0-E-m}\end{aligned}}$$

$$\frac{1+R}{1-R} = -\frac{1}{\varkappa}$$

$$\Downarrow$$

$$R\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right) = -\frac{1}{\varkappa} - 1$$

$$\boxed{R = -\frac{1+\varkappa}{-1+\varkappa}} \qquad \boxed{R = \left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)^2} > 1$$

$$T = 1 - R = \frac{(\varkappa-1)^2 - (\varkappa+1)^2}{(\varkappa-1)^2}$$

$$\boxed{T = -\frac{4\varkappa}{(\varkappa-1)^2}} \; \boxed{< 0}$$

$$1 - \cancel{\frac{1+\varkappa}{\varkappa-1}} = T \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{\omega_k}} \frac{\sqrt{\omega_k - m}}{\sqrt{\omega_p + m}}$$

$$\frac{\cancel{\varkappa-1-\varkappa-1}}{\varkappa-1} = T \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{\omega_k}} \frac{\sqrt{\omega_k - m}}{\sqrt{\omega_p + m}}$$

$$\boxed{T = -\frac{2}{\varkappa-1} \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{\omega_p}} \frac{\sqrt{\omega_p + m}}{\sqrt{\omega_k - m}}}$$

$$T = -\frac{2\sqrt{\varkappa}}{\varkappa-1} \frac{\sqrt{\omega_k p}}{\sqrt{k\omega_p}}$$

Считаем ток в конце

$$j_f = v_k^{\dagger} \alpha v_k = N_k^2 \,(\omega_k + k, -m) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k + k \\ -m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1 \cdot k}{\omega_k(\omega_k+k)} \left[- \cancel{\omega_k^2 + k^2 + k\omega_k + m^2} \right] = -\frac{k}{\omega_k}$$

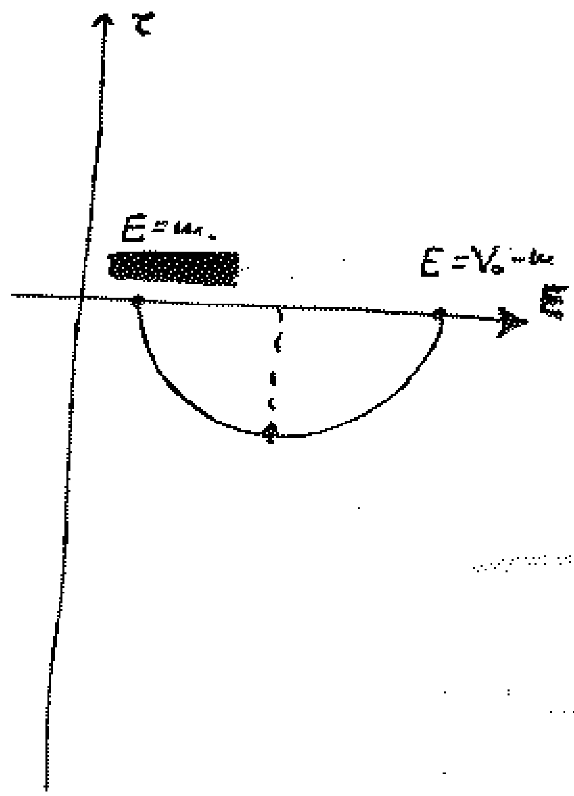
$$\tau = \frac{j_f}{j_i} = -\frac{k}{\omega_k}\frac{\omega_p}{p}|T|^2 = -\frac{k}{p}\cancel{\frac{\omega_p}{\omega_k}}\frac{4}{(\varkappa-1)^2}\cancel{\frac{\omega_k}{\omega_p}}\frac{\omega_p+m}{\omega_k-m}$$

$$\frac{k}{p}\frac{\omega_p+m}{\omega_k-m} \rightarrow \varkappa$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\tau = \frac{-4\varkappa}{(\varkappa-1)^2}\right]$$

Но Парадокс связан с тем, что антифермионы с $\boxed{k>0}$ имеют $\boxed{j<0}$



$$\varkappa = \frac{k}{p}\frac{E+m}{V_0-E-m}$$

$$\tau = -\frac{4\varkappa}{(\varkappa-1)^2}$$

(i) $E+m = V_0$

$\omega_k = \sqrt{k^2+m^2} = V_0 - E = m$

$\Downarrow$

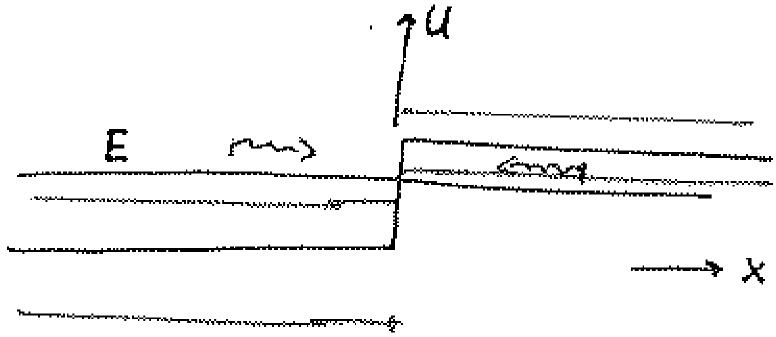
$k=0$

(ii) $E=m$, $p=0$ $\Longrightarrow$ $\varkappa \to \infty$, $\tau \to 0$

Вывод I Уравнение Дирака во внешнем поле может описывать фермионы в одной части пр-ва и антифермионы – в другой.

Но: Понимать такое решение нужно с т. зрения вторично квантованной науки, которая позволяет правильно описывать антифермионы

Интерпретация парадокса Клейна



$\boxed{U > 2m}$. $\Psi(x) \longleftrightarrow$ [Описывает фермион при $x<0$
Описывает антифермион при $x>0$

Антифермионы мы можем правильно понимать только во вторично/квантованном случае.

Заметим что $p>0 \Leftrightarrow e^{ipz}$

соответствует античастице движущейся налево!

Введём вакуум $|0\rangle_-$ – левый

$|0\rangle_+$ – правый

$$\boxed{|\psi\rangle = v_p e^{ipx} b_p |0\rangle_+}$$

$$P = \sum_p p\left(a_p^+ a_p + b_p^+ b_p\right) = \sum_p p\left(a_p^+ a_p - b_p b_p^+\right) + \cancel{const}$$

Требуем чтобы ${}_+\langle 0|P|0\rangle_+ = 0$

$$\hat{P}|\psi\rangle = -\sum_{p'} p'\left(b_{p'} \underbrace{b_{p'}^+ b_p}_{\delta_{pp'}}\right) v_p e^{ipx} |0\rangle_+ =$$

$$= -p\,|\psi\rangle$$

Если мы от $|0\rangle$ отнять ч-цу с импульсом p, то получаем состояние с импульсом $(-p)$

$j < 0$. $\Leftrightarrow$ Antiparticle moves to the left

$\uparrow$ Probability Current

VI

Качественная картина: Частица с ВФ

$u_p e^{ipx}$

столкнулась с дыркой с ВФ $v_k e^{ikx}$ I

Получилась отлетающая волна Re^{-ipx}

VII

$\boxed{\tau = -j_+}$ $\leftarrow$ Вот такая часть частиц аннигилировала с античастицей

Остальная часть полностью отразилась

N частиц $\longrightarrow$

$|\tau| \cdot N$ античастиц $\longleftarrow$ Учавствуют в процессе

$\longleftarrow$ $R \cdot N$ частиц

Качественно: 2 процесса:

~~Наивное сохранение вероятности: $R\cdot N = (1-|\tau|)N = (1+\tau)N$~~

~~$\boxed{R = 1+\tau}$~~

~~Что-то всё ещё не в порядке т.к. у нас $\boxed{\tau + R = 1} \Leftrightarrow R > 1$~~

1) $\psi + A \mapsto B$ $\longleftrightarrow$ Инвертирование времени $\boxed{t \mapsto}$

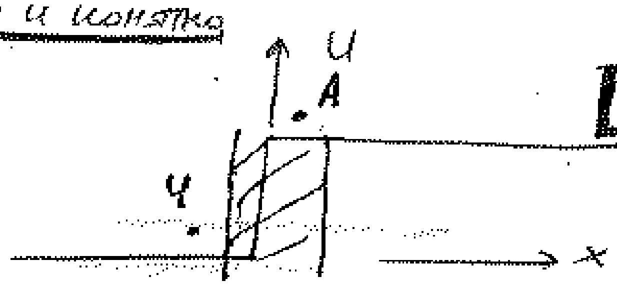
$\boxed{B \mapsto \psi + A}$

2) $\psi(p) \mapsto \psi(-p)$

$\Downarrow$

Вакуум нестабилен

Это и понятно



$\boxed{U_0 > 2m}$

$$\Delta p \Delta x \sim 1 \implies \Delta x \sim 1/\Delta p .$$

$U \mapsto$ Отталкивающий для античастиц!

$\Downarrow$

Виртуально созданные ч-ца и античастица имеют энергию $= 0$

$$0 = -eU_0 + K(A) + K(\psi)$$

Если $eU_0 > 2m$, то возможно производство пар.

~~Давайте опишем процесс компенсации~~

~~$\boxed{Z<0}$ — Разные корни Дирака $\implies$ Разные вакуумы~~

~~$\boxed{Z>0}$~~

Количественное описание

Вторично квантуем по схеме Боголюбова

Мы должны найти собственно энергетические функции Ψ_{E_n} и сопоставить им операторы рождения / уничтожения.

Если бы не было ступеньки

$u_p e^{ipx}$	$a_p^+ \ a_p$
$v_p e^{ipx}$	$b_p^+ \ b_p$

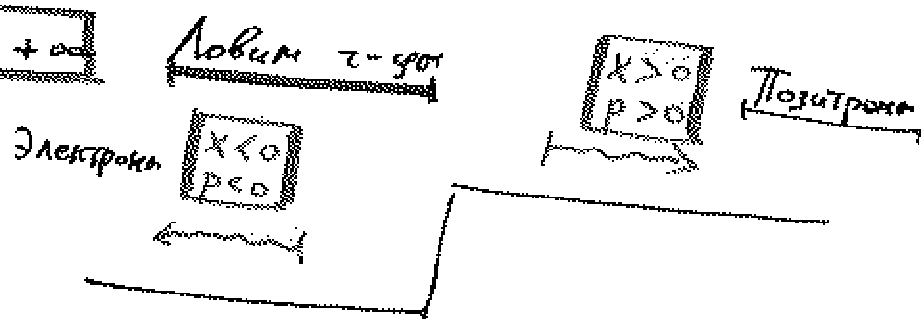
$|0\rangle$

Мы умеем квантовать → при $x<0$ и $x>0$

Но наша задача — задача рассеяния

$\boxed{t \mapsto -\infty}$ ← Запускаем частицы / античастицы по направлению к обл. вз-я

$\boxed{t \mapsto +\infty}$ Ловим ч-цы



Основная мысль — проквантовать 2 раза при $t \mapsto -\infty$ и при $t \mapsto +\infty$

а потом ~~[illegible]~~. сшить с помощью преобразования Боголюбова.

Посмотрим на наше решение

I

Простая штука с т. зрения out-наблюдателя.

$$\Psi_{p} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\omega_p}}{R\sqrt{p}} u_p e^{ipx} + \frac{\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{p}} u_{-p} e^{-ipx}, & x<0 \\ \frac{\sqrt{\omega_k}}{\sqrt{p}} T v_k e^{ikx}, & x>0 \end{cases}$$

$$\boxed{\bar{T} = -\frac{2\sqrt{\varkappa}}{\varkappa - 1}} \qquad \boxed{T = \frac{\sqrt{\omega_k p}}{\sqrt{k\omega_p}} \bar{T}}$$

$$\Psi_p = \begin{cases} \underbrace{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}} u_p e^{ipx}}^{in} + \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_p}{p}} u_{-p} e^{-ipx}}^{out}, & x<0 \\ \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{\bar{T}}{R} v_k e^{ikx}}_{in}, & x>0 \end{cases}$$

II

Волна эл-ронов в out-состоянии движ. с импульсом $(-p)$

Нормировка на поток $= 1$

$$\boxed{R = -\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \qquad \boxed{j = 1}$$

Другое ~~состояние~~ решение, простое с т. зрения out-наблюдателя, такое:

$$\Psi_{h} = \begin{cases} \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\frac{T'}{R'} u_p e^{ipx}}^{in}, & x<0 \\ \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{1}{R'} v_k e^{ikx}}_{in} + \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}} v_{-k} e^{-ikx}}_{out} \end{cases}$$

$$\boxed{u_p = N_p \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p \end{pmatrix}} \quad \boxed{v_p = N_p \begin{pmatrix} \omega_p + p \\ -m \end{pmatrix}} \quad N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p+p)}}$$

$$N_p \sqrt{\frac{\omega_p}{p}} \frac{T'}{\cancel{R'}} m = \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{1}{\cancel{R'}} (\omega_k + k) N_k + \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} N_{-k} (\omega_k - k) R'$$

$$N_p \sqrt{\frac{\omega_p}{p}} \frac{T'}{\cancel{R'}} (\omega_p + p) = \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{1}{\cancel{R'}} (-m) N_k + \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} (-m) R' N_{-k}$$

$$\Downarrow$$

$$N_p \sqrt{\frac{\omega_p}{p}} \frac{(\omega_p + p + m)}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_p(\cancel{\omega_p + p})}} T' = \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} N_k \frac{(\omega_k + k - m)}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_k(\cancel{\omega_k + k})}} + R' \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} N_{-k} \frac{\cancel{(\omega_k - k - m)}}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_k(\cancel{\omega_k - k})}}$$

$$\sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_p + p})(\omega_p + m)} \qquad \sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_k + k})(\omega_k - m)} \qquad \sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_k - k})(\omega_k + m)}$$

$$N_p \sqrt{\frac{\omega_p}{p}} T' \frac{(\omega_p + p - m)}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_p(\cancel{\omega_p + p})}} = -\sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \frac{(\omega_k + k + m)}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_k(\cancel{\omega_k + k})}} N_k - \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} N_{-k} \frac{\cancel{(\omega_k - k + m)}}{\sqrt{\cancel{k}\,\omega_k(\cancel{\omega_k - k})}}$$

$$\sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_p + p})(\omega_p - m)} \qquad \sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_k + k})(\omega_k + m)} \qquad \sqrt{\cancel{k}(\cancel{\omega_k - k})(\omega_k + m)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\omega_p + m}}{\sqrt{p}} T' = \dfrac{\sqrt{\omega_k - m}}{\sqrt{k}} (1 - R') \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\omega_p - m}}{\sqrt{p}} T' = -\dfrac{\sqrt{\omega_k + m}}{\sqrt{k}} (1 + R') \end{cases}$$

$$\frac{1 - R'}{1 + R'} = -\frac{\sqrt{\omega_p + m}}{\sqrt{\omega_p - m}} \frac{\sqrt{\omega_k + m}}{\sqrt{\omega_k - m}} = -\varkappa$$

$$\Rightarrow \boxed{R' = R}$$

$$\frac{\sqrt{\omega_p + m}}{\sqrt{p}} T' = + \frac{\sqrt{\omega_k - m}}{\sqrt{k}} \left[\frac{\cancel{\varkappa} + \cancel{2\varkappa} + \cancel{\varkappa} + \cancel{1}}{\varkappa - 1} \right]$$

$$\boxed{T' = -\bar{T}} \Leftarrow \frac{\sqrt{\omega_p + m}}{\sqrt{p}}\, T' = \frac{2\varkappa\sqrt{\omega_k - m}}{\sqrt{k}}$$

in

V

$$\boxed{\Psi_k = \begin{cases} \underbrace{-\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,\frac{\bar{T}}{R}\, u_p e^{ipx}}_{\text{in}}, & x < 0 \\ \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,\frac{1}{R'}\, v_k e^{ikx}}_{\text{in}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, v_{-k} e^{-ikx}}_{\text{out}}, & x > 0 \end{cases}}$$

$$T^2 = -1 + R^2$$

$$-T^2 = 1 - R^2$$

VI

<u>Квантуем</u>:

$$\Psi_h \longleftrightarrow b_{out},\ b^+_{out}$$

$$\Psi_f \leftrightarrow a_{out},\ a^+_{out}$$

$$|0\rangle_{out} : \quad a_{out}|0\rangle_{out} = b^+_{out}|0\rangle_{out} = 0$$

<u>Но : есть ещё in - наблюдатель</u>

С его т. зрения другие решения ур-ния Дирака – проще.

$$\Phi_f = \begin{cases} \overbrace{\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_p e^{ipx}}^{\text{in}} + \overbrace{\frac{1}{R'}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p} e^{-ipx}}^{\text{out}} \\ \underbrace{\frac{T'}{R'}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, v_{-k} e^{-ikx}}_{\text{out}} \end{cases}$$

$$\cancel{R'\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_p\, m + \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}\, m = \frac{T'}{R'}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,(\omega_k - k)\, N_{-k}}$$

$$\cancel{R'\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_p(\omega_p + p) + \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}(\omega_p - p) = \frac{T'}{R'}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,(-m)\, N_{-k}}$$

$$R'\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_p\, u + \frac{1}{\cancel{R}}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}\, u = \frac{T'}{\cancel{R}}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, N_{-k}\,(\omega_k - k)$$

$$R'\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_p(\omega_p+p) + \frac{1}{\cancel{R}}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}(\omega_p-p) = \frac{T'}{\cancel{R}}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, N_k\,(-u)$$

$$u_p = N_p\begin{pmatrix} u \\ \omega_p+p \end{pmatrix} \quad ; \quad v_p = N_p\begin{pmatrix} \omega_p+p \\ -u \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{p}}\,\cancel{N_{p_s}}\,R'\,\frac{\cancel{(\omega_p+p+u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_p+p})(\omega_p+u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_p}(\cancel{\omega_p+p})}} + \sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{p}}\,\cancel{N_{-p_s}}\,\frac{\cancel{(\omega_p-p+u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_p-p})(\omega_p+u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_p}(\cancel{\omega_p-p})}} =$$

$$= -T'\sqrt{\frac{\cancel{\omega_k}}{k}}\,\cancel{N_{k_s}}\,\frac{\cancel{(\omega_k-k+u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_k-k})(\omega_k-u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_k}(\cancel{\omega_k-k})}}$$

$$\sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{p}}\,R'\,\cancel{N_{p_s}}\,\frac{\cancel{(\omega_p+p-u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_p+p})(\omega_p-u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_p}(\cancel{\omega_p+p})}} - \sqrt{\frac{\cancel{\omega_p}}{p}}\,\cancel{N_{-p_s}}\,\frac{\cancel{(\omega_p-p-u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_p-p})(\omega_p-u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_p}(\cancel{\omega_p-p})}} =$$

$$= -T'\sqrt{\frac{\cancel{\omega_k}}{k}}\,\cancel{N_{k_s}}\,\frac{\cancel{(\omega_k-k+u)}\ \sqrt{\cancel{2}(\cancel{\omega_k-k})(\omega_k+u)}}{\sqrt{\cancel{2\omega_k}(\cancel{\omega_k-k})}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{\omega_p+u}}{\sqrt{p}}\,(1+R') = -T'\,\frac{\sqrt{\omega_k-u}}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{\sqrt{\omega_p-u}}{\sqrt{p}}\,(-R'+1) = T'\,\frac{\sqrt{\omega_k+u}}{\sqrt{k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1+R'}{1-R'} = -\frac{\sqrt{\omega_k-u}}{\sqrt{\omega_k+u}}\,\frac{\sqrt{\omega_p-u}}{\sqrt{\omega_p+u}} = -1/\varkappa \Rightarrow \boxed{R'=R}$$

$$T' = \sqrt{\frac{k}{p}}\ \frac{\sqrt{\omega_p - m}}{\sqrt{\omega_k + m}} \left(\frac{2\varkappa - \cancel{1} + \cancel{\varkappa + 1}}{\varkappa - 1} \right)$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\omega_p + m)(\omega_k + m)}}{\sqrt{(\omega_p - m)(\omega_k - m)}} = \frac{p}{k}\ \frac{\omega_k + m}{\omega_p - m}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T' = -\bar{T}}$$

$$\Phi_p = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_p\, e^{ipx} \ {}^{in} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p}\, e^{-ipx} \ {}^{out} \\ -\frac{\bar{T}}{R} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, v_{-k}\, e^{-ikx} \ {}^{out} \end{cases}$$

$$\boxed{R^2 - 1 = \bar{T}^2}$$

$$\Phi_k = \begin{cases} \frac{T'}{R'} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p}\, e^{-ipx} \ {}^{out} \\ v_k\, e^{ikx} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \ {}^{in} + \frac{1}{R'}\, e^{-ikx}\, v_{-k} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}} \ {}^{out} \end{cases}$$

$$\frac{T'}{\cancel{R'}} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}\, m = R' N_k \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, (\omega_k + k) + \frac{1}{\cancel{R'}} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, N_{-k}\, (\omega_k - k)$$

$$\frac{T'}{\cancel{R'}} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p} (\omega_p - p) = R' N_k \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, (-m) + \frac{1}{\cancel{R'}}\, N_{-k} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, (-m)$$

$$\Downarrow$$

$$T' \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_p\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_p - p)}(\omega_p + m)}\ \cancel{(\omega_p - p + m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_p(\omega_p - p)}}} = R' \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, N_k\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_k + k)}(\omega_k - m)}\ \cancel{(\omega_k + k - m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_k(\omega_k + k)}}} + N_{-k} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_k - k)}(\omega_k - m)}\ \cancel{(\omega_k - k - m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_k(\omega_k - k)}}}$$

$$-T' \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, N_{-p}\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_p - p)}(\omega_p - m)}\ \cancel{(\omega_p - p + m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_p(\omega_p - p)}}} = -R' N_k \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_k + k)}(\omega_k + m)}\ \cancel{(\omega_k + k + m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_k(\omega_k + k)}}} - N_{-k} \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, \frac{\sqrt{\cancel{k(\omega_k - k)}(\omega_k + m)}\ \cancel{(\omega_k - k + m)}}{\sqrt{\cancel{k\omega_k(\omega_k - k)}}}$$

$$-T'\,\frac{\sqrt{\omega_p+m}}{\sqrt{p}} = +\,\frac{\sqrt{\omega_k-m}}{\sqrt{k}}\,(1-R')$$

$$T'\,\frac{\sqrt{\omega_p-m}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\omega_k+m}}{\sqrt{k}}\,(1+R')$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1-R'}{1+R'} = -\,\frac{\sqrt{(\omega_p+m)(\omega_k+m)}}{\sqrt{(\omega_p-m)(\omega_k-m)}} = -\varkappa \quad \Rightarrow \quad \boxed{R'=R}$$

$$T' = \sqrt{\frac{p}{k}}\;\frac{\sqrt{\omega_k+m}}{\sqrt{\omega_p-m}}\left(\frac{\varkappa-1-\varkappa-1}{\varkappa-1}\right) =$$

$$= -\,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{\varkappa-1} = \bar{T}$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi_k = \begin{cases} \underbrace{\frac{\bar{T}}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\,u_{-p}\,e^{-ipx}}_{out} \\ \underbrace{v_k\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\,e^{ikx}}_{in} + \underbrace{\frac{1}{R}\,e^{-ikx}\,v_{-k}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}}_{out} \end{cases}$$

$$\Psi_f = \begin{cases} \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_p e^{ipx} + \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p} e^{-ipx}^{\;out}, & x<0 \\ \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, \frac{\bar{T}}{R}\, v_k e^{ikx}, & x>0 \end{cases}$$

$$\Psi_k = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, \frac{\bar{T}}{R}\, u_p e^{ipx}, & x<0 \\ \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, \frac{1}{R}\, v_k e^{ikx} + \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, v_{-k} e^{-ikx}^{\;out}, & x>0 \end{cases}$$

$$\Phi_f = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_p e^{ipx} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p} e^{-ipx}, & x<0 \\ -\frac{\bar{T}}{R}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, v_{-k} e^{-ikx} \end{cases}$$

$$\Phi_k = \begin{cases} \frac{\bar{T}}{R}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}}\, u_{-p} e^{-ipx}, & x<0 \\ v_k \sqrt{\frac{\omega_k}{k}}\, e^{ikx} + \frac{1}{R} e^{-ikx} v_{-k}\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}, & x>0 \end{cases}$$

<u>Поэтому квантуем 2 раза</u>

(out) $\left[\begin{array}{lll} \hat{a}_{out} & \leftrightarrow & \Psi_f \\ \hat{b}^{+}_{out} & \leftrightarrow & \Psi_k \end{array}\right.$ — Рождает ч-цу в состоянии Ψ_f

$$|0\rangle_{out} : \quad \hat{a}_{out}|0\rangle_{out} = b^{+}_{out}|0\rangle_{out} = 0$$

<u>Замечание про нормировку:</u>

$$\langle \Psi_f | \Psi_f \rangle = {}_{out}\langle 0| a^{*}_{out}\, a^{+}_{out} |0\rangle$$

$$2\pi\delta(p-p')$$

<u>По out-состояниям:</u>

$$\langle \Psi_{f_p} | \Psi_{f_{p'}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\omega_p}{p}\, \underbrace{u^{+}_{-p}\, u_{-p'}}_{1}\, e^{-ip'x+ipx}$$

$$\boxed{\{a_{out}, a^+_{out}\} = 2\pi \frac{\omega_p}{p} \delta(p-p')} \quad \{b^*_{out}, b_{out}\} = 2\pi \frac{\omega_k}{k} \delta(k-k')$$

$$\boxed{= 2\pi \frac{\omega_p}{p} \delta(p-p')}$$

<u>Задача</u> Проверить нормировку явном вычислением (см. Ландафшиц)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \Psi_f^+(p_2, x)\, \Psi_f(p_2, x) = 2\pi \frac{\omega_p}{p} \delta(p_1 - p_2)$$

(in) $\left[\begin{array}{l} \hat{a}_{in} \leftrightarrow \Phi_f \\ b^+_{in} \leftrightarrow \Phi_k \end{array}\right.$

$|0\rangle_{in} \quad : \quad \hat{a}_{in} |0\rangle_{in} = b^+_{in} |0\rangle_{in} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \{\hat{a}_{in}, \hat{a}^+_{in}\} = 2\pi \frac{\omega_p}{p} \delta(p-p') \\ \{b^+_{out}, b_{out}\} = 2\pi \frac{\omega_p}{p} \delta(p-p') \end{array}}$$

Мы 2 раза проквантовали одну и ту же систему

$\Downarrow$

Должна быть связь между

$$\left.\begin{array}{l} a_{in} \\ b^+_{in} \\ |0\rangle_{in} \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_{out} \\ b^+_{out} \\ |0\rangle_{out} \end{array}\right.$$

Эта связь устанавливается <u>преобразованием</u> <u>Боголюбова</u>

Заметим, что у ур-ния Дирака есть лишь 2 независимых решения $\Rightarrow$ Остальные 2 выражаются

Рассмотрим Ψ_f в in-состоянии

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi_f &= \frac{1}{R}\,\Phi_f + \frac{\bar{T}}{R}\,\Phi_h \\ \Psi_h &= \frac{1}{R}\,\Phi_h - \frac{\bar{T}}{R}\,\Phi_f \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_f \\ \Psi_h \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/R & \bar{T}/R \\ -\bar{T}/R & 1/R \end{pmatrix}}_{\hat{S}} \begin{pmatrix} \Phi_f \\ \Phi_h \end{pmatrix}$$

$\hat{S} \leftarrow$ S-матрица

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Phi_f \\ \Phi_h \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{T} \\ \bar{T} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_f \\ \Psi_h \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} \det \hat{S} = \dfrac{1}{R^2}\left(1 + \bar{T}^2\right) = 1 \\ S^{+} S = \dfrac{1}{R^2}\begin{bmatrix} 1 & -\bar{T} \\ \bar{T} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \bar{T} \\ -\bar{T} & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{R^2}\begin{bmatrix} 1+\bar{T}^2 & \bar{T}-\bar{T} \\ \bar{T}-\bar{T} & 1+\bar{T}^2 \end{bmatrix} = 1 \end{cases}$$

S-матрица унитарна

Неудивительно: она сохраняет норму состояний

Если in-наблюдатель приготовил систему в состоянии

$$\Phi = a_f^* \Phi_f + a_h^* \Phi_h = \left(a_f^*,\ a_h^*\right)\begin{pmatrix} \Phi_f \\ \Phi_h \end{pmatrix} =$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_f \\ a_h \end{pmatrix} \qquad = \left(a_f,\ a_h\right) S^{T} \begin{pmatrix} \Psi_f \\ \Psi_h \end{pmatrix} =$$

out-наблюдатель $=$ ~~...~~ и наблюдает состояние $\boxed{\Psi = \hat{S}\begin{pmatrix} a_f \\ a_h \end{pmatrix}}$

Установим связь между способами квантования.

(1) $\boxed{\begin{matrix}|\Psi\rangle_{in}\\ |\Psi\rangle_{out}\end{matrix}}$ ← Нет ч-ц [redacted] ни в каких состояниях

⇒ $\boxed{\text{Можно отождествить эти состояния}}$

$$|\Psi_{in}\rangle = |\Psi_{out}\rangle = |\Psi\rangle$$

~~Но $|\Psi\rangle$ однозначно определяется уравнением~~

$$\cancel{\hat a_{in}|\Psi\rangle = b_{in}|\Psi\rangle = 0}$$

~~Также не знаем, что~~

(2) Рассмотрим состояние

$a^+_{out}|\Psi\rangle$ ← содержит 1 ч-цу в состоянии Ψ^+_f

H_0: $\Psi_f = \frac{1}{R}\Phi_f + \frac{\bar T}{R}\Phi_l$

$$\boxed{a^+_{out}|\Psi\rangle = \frac{1}{R}a^+_{in}|\Psi\rangle + \frac{\bar T}{R}b^+_{in}|\Psi\rangle}$$

$$\hat a^+_{out} = \frac{1}{R}\hat a^+_{in} + \frac{\bar T}{R}b^+_{in} + N\hat a_{in} + M b_{in}$$

$$\cancel{\{a^+_{out}, a^+_{out}\} = \left\{\frac{1}{R}a^+_{in} + \frac{\bar T}{R}b^+_{in} + N a_{in} + M\hat a_{out}\right\}}$$

$$\cancel{= 2\pi\frac{i}{?}(\ldots)\left(\frac{1}{R}N + \frac{\bar T}{R}M\right) = 0 \Rightarrow \boxed{N = -\bar T M}}$$

$$\{\hat{a}_{out}, \hat{a}^{+}_{out}\} = \delta(\dots)\cdot 2\pi \frac{\omega_p}{p} =$$

$$= \{ \frac{1}{R} a^{+}_{in} + \frac{\bar{T}}{R} \hat{b}^{+}_{in} + N \hat{a}_{in} + M \hat{a}_{out},$$

$$\frac{1}{R} a_{in} + \frac{\bar{T}}{R} b_{in} + \overset{*}{N} a^{+}_{in} + \overset{*}{M} a^{+}_{out} \} =$$

$$= 2\pi \frac{\omega}{p} \delta(-) \{ \underbrace{\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\bar{T}^2}{R^2}\right)}_{1} + \underbrace{|N|^2 + |M|^2}_{0} \} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} N = 0 \\ M = 0 \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a^{+}_{out} = \alpha\, a^{+}_{in} + \beta\, b^{+}_{in}}$$

<u>Коэффициенты Боголюбова</u>

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha = 1/R \\ \beta = \bar{T}/R \end{matrix}} \qquad \boxed{a_{out} = \alpha\, a_{in} + \beta\, b_{in}}$$

<u>Аналогично</u> $b^{+}_{out} |\Psi\rangle = 1/R\, b^{+}_{in} |\Psi\rangle - \bar{T}/R\, a^{+}_{in} |\Psi\rangle$

$$\Updownarrow$$

$$\Psi_h = 1/R\, \Phi_h - \bar{T}/R\, \Phi_f$$

$$\boxed{\hat{b}^{*}_{out} = \alpha\, b^{*}_{in} - \beta\, a_{in}}$$

Теперь мы можем найти $|0\rangle_{out}$ в терминах $|0\rangle_{in}$ и опер-ров рождения / уничтожения

<u>Надо решить ур-ния</u> $$\boxed{\begin{matrix} (\alpha\, b^{+}_{in} - \beta\, a^{+}_{in})\, |0\rangle_{out} = 0 \\ (\alpha\, a_{in} + \beta\, b^{*}_{in})\, |0\rangle_{out} = 0 \end{matrix}}$$

~~Над этим лекторы долбались 1 час это~~

Задача Найти $|0\rangle_{out}$. Указание: для простоты считать, что выполнены коммутационные соотношения

$$\boxed{\{a^+, a\} = 1 = \{b^+, b\}}$$

$$|0\rangle_{out} = A|0\rangle_{in} + B a^+_{in}|0\rangle_{in} + C b^+_{in}|0\rangle_{in} + D a^+_{in} b_{in}|0\rangle_{in}.$$

$$\cancel{(\alpha b_{in} + \beta a^+_{in})|0\rangle_{out}} =$$

$$\begin{cases} b^+_{in}|0\rangle_{out} = B\cancel{b^+_{in}a^+_{in}}|0\rangle_{in} + C|0\rangle_{in} + D(-1)a^+_{in}|0\rangle_{in} \\ \uparrow \text{Уничтожения} \\ a^+_{in}|0\rangle_{out} = A a^+_{in}|0\rangle_{in} + C a^+_{in} b_{in}|0\rangle_{in}. \\ \uparrow \text{Рождения} \end{cases}$$

$$b^+_{out}|0\rangle_{out} = \left(\cancel{\alpha B b^+_{in} a^+_{in}} + \underline{\alpha C} - \alpha D a^+_{in} - \beta A a^+_{in} - \underline{\beta C a^+_{in} b_{in}}\right)|0\rangle_{in}$$

$$\boxed{C = 0} \qquad \boxed{\beta A + \alpha D = 0}$$

$$\begin{cases} a_{in}|0\rangle_{out} = B|0\rangle_{in} + D b_{in}|0\rangle_{in} \\ \uparrow \text{Уничтожение} \\ b_{in}|0\rangle_{out} = A b_{in}|0\rangle_{in} + B b_{in} a^+_{in}|0\rangle_{in} + \\ \uparrow \text{Рождение} \end{cases}$$

$$a_{out}|0\rangle_{out} = \left(\underline{\alpha B} + \alpha D b_{in} + \beta A b_{in} + \underline{\beta B b_{in} a^+_{in}}\right)|0\rangle_{in}$$

$$\boxed{B = 0} \qquad \boxed{\alpha D + \beta A = 0}$$

II

$$\boxed{\begin{aligned} D &= -N\beta \\ A &= N\alpha \end{aligned}}$$

$$|0\rangle_{out} = N\left(\alpha|0\rangle_{in} - \beta\, a^+_{in}\, b_{in}\, |0\rangle_{in}\right).$$

$$_{out}\langle 0|0\rangle_{out} = |N|^2\Big(\underbrace{|\alpha|^2 + |\beta|^2}_{1}\Big) \Rightarrow N = 1$$

$$\boxed{|0\rangle_{out} = \alpha|0\rangle_{in} - \beta\, a^+_{in}\, b_{in}\, |0\rangle_{in}}$$

Теперь посчитаем амплитуду процесса создания пары.

$$A_{ан2} = {}_{out}\langle 0|\, b_{out}\, a^+_{out}\, |0\rangle_{in}$$

in - наблюдатель не запустил никаких ч-ц

Out - наблюдатель фиксирует единичный поток частиц и единичный поток античастиц.

~~Есть простой трюк вычисления такого~~ матричного ~~эл-та~~

$$\cancel{b_{out} = \alpha\, b_{in} - \beta\, a_{in}} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{out} \\ b_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{out} \\ b_{out} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы всё опять понять в терминах вероятностей. Посадим опять систему в ящик

$$\boxed{\psi(x+L) = \psi(x)}$$

Мы знаем как нормировать ВФ. $\psi_f^L = u_p \frac{e^{ipx}}{\sqrt{L}}$

Но мы до этого нормировали ВФ $\psi_f = \frac{u_p\sqrt{\omega_p}}{\sqrt{p}} e^{ipx}$

$$\boxed{\psi_f^L = \psi_f \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\omega_p}}}$$

Состояние, содержащее фермион + дырка с т. зрения out - наблюдателя

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\omega_p}}\right)^2 a^{+}_{out}\, b_{out} |0\rangle_{out}.$$

Правильно нормируем.

$$\boxed{A_{0\mapsto 2} = {}_{out}\langle 0| \frac{p}{L\omega_p}\, a_{out}\, b^{+}_{out} |0\rangle_{in}}$$

$$\boxed{P_{0\mapsto 2} = |A_{0\mapsto 2}|^2}$$

$$b^{+}_{in} |0\rangle_{in} = 0 =$$

$$= \beta a^{+}_{out} |0\rangle_{in} + \alpha\, b^{+}_{out} |0\rangle_{in}$$

$$b^{+}_{out} |0\rangle_{in} = -\beta/\alpha\, a^{+}_{out} |0\rangle_{in}.$$

$$A_{0\mapsto 2} = \beta/\alpha \frac{p}{L\omega_p} \underbrace{{}_{out}\langle 0|\, a_{out}\, a^{+}_{out} |0\rangle_{in}}_{2\pi \frac{\omega_p}{p}\delta(p=0)\, A_{0\mapsto 0}}$$

$$2\pi\delta(p=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}dx = L$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\delta(0) = \frac{L}{2\pi}}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{A_{0\mapsto 2} \doteq \beta/\alpha \, A_{0\mapsto 0}}$$

Унитарность $|A_{0\mapsto 2}|^2 + |A_{0\mapsto 0}|^2 = 1$

$\searrow P_2 \qquad \searrow P_0$

Задача: Показать, что $A_{0\mapsto 1f} = 0$

$A_{0\mapsto 1h} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{1+\beta^2/\alpha^2}\,\alpha^2 \\ P_2 &= \beta^2/\alpha^2 \cdot \alpha^2 = \beta^2 \end{aligned}}$$

$\boxed{P_{2\mapsto 0} = P_{0\mapsto 2}}$

Обращение времени

Теперь: $P_2 \mapsto$ Вероятность рождения из вакуума пару $\boxed{\text{ч-цы + античастица}}$ с ВФ

$$\Psi^L = \Psi_f \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\omega_p}}$$

~~Amplitude~~

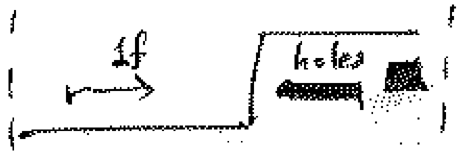
~~[illegible]~~

~~$\Downarrow$~~

~~Пускаем поток ч-ц~~

~~N ч-ц / ед. времени~~

$$\boxed{P_{0\to 2} = P_{2\to 0}}$$



P_2 – вероятность аннигиляции

P_0 – отражения

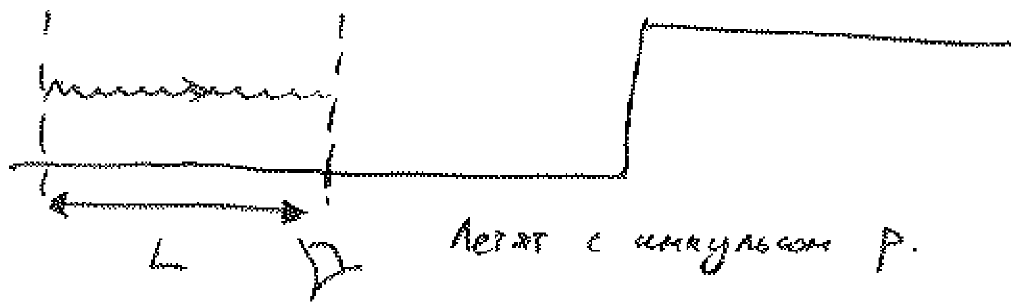
Посчитаем вер-ность рождения пар в ед. времени

Рассмотрим интервал импульсов $(p;\ p+\Delta p)$

$$p = \frac{2\pi}{L} n \qquad \Delta p = \frac{2\pi}{L}\Delta n \Rightarrow \boxed{\Delta n = \frac{L\,\Delta p}{2\pi}}$$

Количество состояний

Либо заселены либо не заселены фермионами



Летят с импульсом p.

$$v = \frac{p}{\omega_p}$$

За время $\Delta t = \dfrac{L}{v} = \dfrac{L\,\omega_p}{p}$

все Δn состояний пролетят мимо наблюдателя.

$\Downarrow$

i_n – наблюдатель засекает $\dfrac{\Delta n}{\Delta t} = \dfrac{\Delta n \cdot p}{L\,\omega_p}$

состояний в ед. времени.

Вероятность каждому состоянию ~~пойти в ту~~ приобрести фермион P_2

$\Downarrow$ На обратном пути

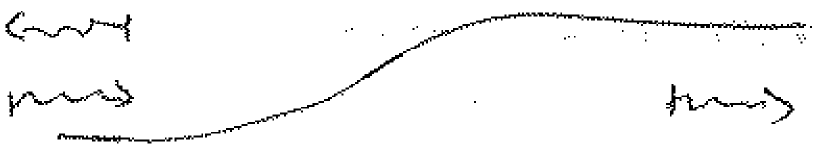
$$j_f = \frac{\Delta N_f}{\Delta t} = P_2 \frac{\Delta n\, p}{L\,\omega_p} = P_2 \frac{\Delta p}{2\pi} \frac{p}{\omega_p}$$

$$\boxed{j_f = \frac{dN_f}{dt} = \frac{P_2}{2\pi}\frac{p}{\omega_p}dp} = \frac{P_2}{2\pi}d\omega_p$$

$$\boxed{j_k = \frac{dN_k}{dt} = \frac{P_2}{2\pi}\frac{k}{\omega_k}dk} = \frac{P_2}{2\pi}d\omega_k$$

Вывод

Мы научились описывать процесс рождения пар



$$\boxed{\begin{aligned} \Psi_f &\mapsto \sqrt{\frac{\omega_p}{p}}u_p e^{ipx} + R u_{-p} e^{-ipx}\sqrt{\frac{\omega_p}{p}} \\ \Psi_f &\mapsto T\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}v_k e^{ikx} \end{aligned}} \quad \boxed{x \mapsto -\infty} \quad \boxed{x \mapsto +\infty}$$

Оценка просто посчитать вероятность аннигиляции

$$\boxed{P_2 = \beta^2 = \frac{T^2}{R^2}}$$

и ток рождённых фермионов / антиферм. в интервале импульсов dp.

$$\boxed{j_f = \frac{dN_f}{dt} = \frac{P_2}{2\pi}\frac{p}{\omega}dp = j_k = \frac{P_2}{2\pi}\frac{k\,dk}{\omega_k}}$$

Задача на преобразование Боголюбова

Дан гармонический осциллятор с частотой, зависящей от времени,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{\omega^2}{2}(t)\hat{q}^2$$

где $\omega^2(t) = \frac{1}{2}\left[\omega_f^2 + \omega_i^2 + (\omega_f^2 - \omega_i^2)\,th(Ht)\right]$

Пусть при $t = t_i \to -\infty$ осциллятор находится в вакуумном состоянии. Найти средний уровень заполнения $\langle a_f^+ a_f \rangle$ и квадратичное значение координаты $\langle (X(t_f))^2 \rangle$ при $t = t_f \to +\infty$.

Для этого:

1) Проквантовать осциллятор при $t = t_i \to -\infty$ (картина Гайзенберга). Представить оператор в виде

$$x(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\left[\hat{a}_i e^{-i\omega_i t_i} + \hat{a}_i^+ e^{i\omega_i t_i}\right]$$

где $\hat{a}_i, \hat{a}_i^+$ операторы рождения/уничтожения при $t = t_i \to -\infty$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_i^+] = 1$. Вакуумное состояние определяется рав-вом $a_i|0\rangle = 0$

2) Проквантовать опер-р при $t = t_f \to +\infty$. Найти опер-ры рождения/уничтожения $\hat{a}_f, \hat{a}_f^+$

3) Проквантовать осциллятор при всех t в представлении Гайзенберга. Представить опер-р координаты в виде:

$$x(t) = \hat{a}\, v(t) + \hat{a}^+ v^*(t) \quad (*)$$

где $\hat{a}, \hat{a}^+$ – квантовые опер-ры, не зависящие от t, $[a, a^+] = 1$, v – с-числовая ф-ция. Показать, что ур-ние Гайзенберга эквивалентно класс. ур-нию для v:

$$\ddot{v} + \omega^2_{(t)} v = 0$$

Решить это ур-ние с нач. условиями,

$v(t_i) \to e^{-i\omega_i t_i}/\sqrt{2\omega_i}$, $t_i \to -\infty$

(Указание: Заметить, что ур-ние — суть 1D ур-е Шредингера и воспользоваться решением из Ландафшица

Показать, что вронскиан

$$W = \dot{v}(t)\, v^*(t) - v(t)\, \dot{v}^*(t) = -i$$

не зависит от времени.

4) Рассмотреть асимптотику решения (*) при $t = t_f \to +\infty$.
Показать, что $\hat{a}_i = \hat{a}$. Показать, что асимптотика $v(t)$ при $t \to +\infty$ представляется в виде

$$v(t_f) \to \frac{1}{\sqrt{2\omega_f}} \left[\alpha^* e^{-i\omega_f t_f} - \beta e^{i\omega_f t_f} \right]$$

Найти коэффициенты Боголюбова α, β.

Показать, что из сохранения вронскиана следует тождество $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$

5) Путём сравнения ф-л для решения $\hat{x}(t)$ при $t \to +\infty$, показать, что

$$a_f = \alpha^* a_i - \beta^* a_i^+$$

6) Согласно условию, осциллятор находится в состоянии $|0\rangle_i$, которое в картине Гайзенберга не зависит от времени.

Найти искомые величины

$|\beta|^2 = \langle a_f^+ a_f \rangle$ $\qquad \langle \overline{x^2(t_f)} \rangle = \frac{1}{2\omega_f}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$