Лекция 1

Фермионы. $\boxed{\text{Релятивистская квантовая механика ч-ц со спином } 1/2.}$

① Релятивистская квантовая механика ч-цы со спином 0 (Введение)

Принцип относительности: Физические з-ны одни и те же

а) $\Psi(x)$ — ВФ

б) $[\hat{p},\hat{q}] = -i \Rightarrow \hat{p} = -i\partial_x$

в) Ур-ние Шредингера

$$i\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$$

Частица релятивистская $\Rightarrow$ $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2+m^2}$

$$\boxed{i\partial_t\Psi = \sqrt{\hat{p}^2+m^2}\,\Psi}$$

нелокальный оператор.

$$\Downarrow$$

$$\partial_t^2\Psi = -i\partial_t(i\partial_t\Psi) = -(\hat{p}^2+m^2)\Psi = (\partial_x^2-m^2)\Psi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\Box+m^2)\Psi=0} \leftarrow \text{Уравнение Клейна-Гордона}$$

Паразитное решение: $\Psi = e^{-iEt+ipx}$

$$\boxed{E=\pm\sqrt{p^2+m^2}} \leftarrow \text{Решения со знаком "−" паразитные.}$$

На самом деле, все известные локальные релятивистские обобщения ур-ния Шредингера имеют паразитное решение.

Уравнение Дирака

d измерений

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma^{0+} &= \gamma^0 \\ \gamma^{i+} &= -\gamma^i\end{aligned}}$$

Постулат: $\boxed{i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0}$

1) $\gamma^{\mu +} = +\gamma_\mu$

2) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

Общие свойства:

1) Ур-ние Дирака является ур-нием Шредингера

$$i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^i\partial_i\psi - m\psi = 0$$

$$i\partial_0\psi = -i\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + m\gamma^0\psi.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^i &= \gamma^0\gamma^i \\ \beta &= \gamma^0\end{aligned}} \qquad \boxed{H_D = \alpha^i \hat{p}_i + \beta m.}$$

$$\boxed{p_i = -i\partial_i}$$

$$\alpha_i^+ = \alpha_i = -\gamma^i\gamma^0 = \gamma^0\gamma^i = \alpha^i$$
$$\beta^+ = \beta$$
$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{H}_D \text{ эрмитов}}$

---

2) Сохранение вероятности

$\boxed{\rho = \psi^+\psi}$ $\leftarrow$ Плотность вероятности

$$\boxed{\begin{aligned} i\partial_t\Psi &= -i\alpha^i\partial_i\Psi + \beta m\Psi \\ -i\partial_t\Psi^+ &= i\,\partial_i\Psi^+\alpha^i + m\Psi^+\beta \end{aligned}}$$

$$\partial_t\rho = \partial_t\Psi^+\Psi + \Psi^+\partial_t\Psi =$$
$$= \frac{1}{(-\cancel{i})}\left(\cancel{i}\partial_i\Psi^+\alpha^i\Psi + \cancel{m\Psi^+\beta\Psi}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\cancel{i}}\left(-\cancel{i}\,\Psi^+\alpha^i\partial_i\Psi + \cancel{m\Psi^+\beta\Psi}\right) =$$
$$= -\partial_i\left[\Psi^+\alpha^i\Psi\right] \qquad \boxed{\partial_t\rho + \partial_i j^i = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} j^i &= \Psi^+\alpha^i\Psi \\ \rho &= \Psi^+\Psi \end{aligned}}$$

j^i ← Плотность тока вероятности.

ρ ← Плотность вероятности.

$\Downarrow$

ВФ можно нормировать → $\boxed{\int \Psi^+\Psi\, d\vec{x}^{d-1} = 1}$

---

3). Лоренц-инвариантность

Ур-ние Дирака Ковариантно

$$\boxed{\hat{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]}$$

$$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

$$\Psi'(x') = \Lambda_{1/2}\,\Psi(x)$$

$$i\gamma^\mu\partial'_\mu\Psi'_{(x')} - m\Psi'_{(x')} = 0$$

$$i\gamma^\mu\partial_\nu(\Lambda^{-1})^\nu_{\ \mu}\Lambda_{1/2}\Psi - m\Lambda_{1/2}\Psi = 0$$

$$i\left(\Lambda^{-1}_{1/2}\,(\Lambda^{-1})^\nu_{\ \mu}\gamma^\mu\Lambda_{1/2}\right)\partial_\nu\Psi - m\Psi = 0$$

Итак: $\boxed{\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu}$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}(J^{\rho\sigma})^\mu{}_{\ae\nu}\,\eta^{\mu\rho}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cancel{\omega_{\rho\sigma}}\, i\,\eta^{\mu\ae}\left(\cancel{\delta^\rho_\ae\delta^\sigma_\nu} - \cancel{\delta^\sigma_\ae\delta^\rho_\nu}\right)$$

$$\omega_{\ae\nu} - \omega_{\nu\ae}$$

$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu}$ $\qquad$ $\boxed{\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}}$

$$\boxed{\Lambda_{1/2} = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}}$$

$$S^{\rho\sigma} = \frac{i}{4}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]$$

$$\Lambda_{1/2}^{-1} = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}$$

$$\Lambda_{1/2}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{1/2} = \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\mu\left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\ae\epsilon}S^{\ae\epsilon}\right) =$$

$$= \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[S^{\rho\sigma},\gamma^\mu]$$

$$[S^{\rho\sigma},\gamma^\mu] = \frac{i}{4}[[\gamma^\rho,\gamma^\sigma],\gamma^\mu] =$$

$$= \frac{i}{4}[\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho]$$

$$-\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma + 2\eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho$$

$$-2\eta^{\rho\mu}\gamma^\sigma$$

$$\cancel{2\eta^{\mu\rho}\gamma^\rho} - \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho$$

$$\cancel{-2\gamma^\sigma\eta^{\mu\rho}}$$

$$\boxed{[S^{\rho\sigma},\gamma^\mu] = i[\eta^{\sigma\mu}\gamma^\rho - \eta^{\mu\rho}\gamma^\sigma]}$$

$$\Lambda_{\frac12}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac12} = \gamma^\mu - \frac{i}{4}\omega_{\rho\sigma}[\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho - \cancel{\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma}] =$$

$$= \gamma^\mu - \frac{1}{2}\omega_{\rho}{}^{\mu}\gamma^\rho + \cancel{\frac{1}{2}\omega} = \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\rho\gamma^\rho =$$

$$= \Lambda^\mu{}_\rho\gamma^\rho \quad \text{ok}$$

Суммируя:

$$\begin{cases} x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \end{cases}, \quad \boxed{\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}}$$

$$\psi(x) \mapsto \boxed{\psi'(x') = \Lambda_{\frac12}\psi(x)}$$

$$\begin{cases} \Lambda_{\frac12} = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma} \\ S^{\rho\sigma} = \frac{i}{4}[\gamma^\rho,\gamma^\sigma] \end{cases}$$

$$\boxed{\bar\psi = \psi^+\gamma^0}$$

$\bar\psi\psi$ ← Скаляр

$\bar\psi\gamma^\mu\psi$ – вектор

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^+\psi = \bar\psi\gamma^0\psi \\ j^i &= \psi^+\alpha^i\psi = \bar\psi\gamma^i\psi \end{aligned} \quad \boxed{j^\mu} \leftrightarrow \psi\text{ – ток вероятности.}$$

[redacted]

4) Неположительность энергии.

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu\psi) = m^2\psi$$

$$-\frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu\psi = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi = -\Box\psi$$

$$\boxed{(\Box + m^2)\psi = 0} \Rightarrow \boxed{\text{Каждая компонента ур-нию Клейна-Гордона}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega^2 = \pm\sqrt{p^2+m^2}} \leftarrow \boxed{\text{Мы подозреваем что есть решение с отриц. энергии}}$$

E не ограничена снизу

Свободные фермионы в $D=2$

Обозначение

$$\boxed{\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\tau_a \tau_b = \delta_{ab} + i \varepsilon_{abc} \tau_c} \qquad \tau_a^+ = \tau_a$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma^0 &= \tau_1 \\ \gamma^1 &= i\tau_2 \end{aligned}} \qquad (\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^1)^2 = -1$$

$$\{\gamma^0, \gamma^1\} = 0 \qquad \text{ok}$$

$$\gamma^{0+} = \gamma^0$$

$$\gamma^{1+} = -\gamma^1 \qquad \text{ok}$$

$$\boxed{\hat{H}_D \Psi = \omega \Psi = [\alpha \hat{p} + \beta m] \Psi(x)}$$

$$\alpha = \gamma^0 \gamma^1 = i\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\tau_3$$

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Импульс коммутирует с гамильтонианом

$$\hat{p}\Psi_p = p\Psi_p \qquad \boxed{\Psi = e^{ipx} \tilde{\Psi}_p}$$

$$\boxed{\omega \tilde{\Psi}_p = [\alpha p + \beta m] \tilde{\Psi}_p} = \begin{pmatrix} -p & m \\ m & p \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_p$$

$$\boxed{\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1} = \cancel{-i}\,\tau_1(\cancel{i}\tau_2) = i\tau_3$$

$$\begin{pmatrix} \omega + p & -m \\ -m & \omega - p \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_p = 0 \implies \omega^2 = p^2 + m^2$$

$$\boxed{\omega = \pm\omega_p = \pm\sqrt{p^2 + m^2}}$$

$$U_p = \begin{pmatrix} U_{pL} \\ U_{pR} \end{pmatrix}$$

$$(\omega_1 + p)\, U_{pL} = m\, U_{pR}$$

$$U_{pR} = \left(\frac{\omega_p + p}{m}\right) U_{pL}$$

$$U_{pR}^{(-)} = \left(\frac{-\omega_p + p}{m}\right) U_{pL}$$

$$\boxed{U_p = N_p^{(+)} \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\left(U_p^{(+)}\right)^{\dagger} U_p^{(+)} = 1}$$

$$\left(N_p^{(+)}\right)^{-1} = \sqrt{(\omega_p + p)^2 + m^2} = \sqrt{2\omega_p^2 + 2p\omega_p}$$

$$N_p^{(-)} = \sqrt{(+\omega_p + p)^2 + m^2} = \sqrt{2\omega_p(\omega_p + p)}$$

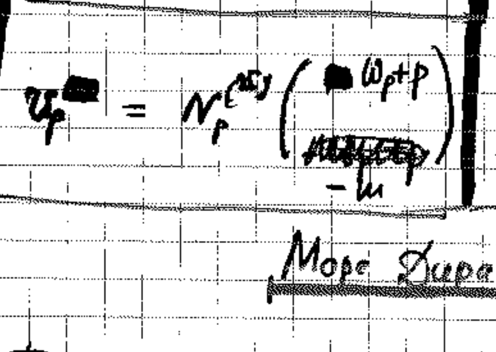
$$\boxed{U_p = N_p^{(-)} \begin{pmatrix} \omega_p + p \\ -m \end{pmatrix}} \longleftarrow$$ Имеют отрицательную энергию

Море Дирака

Посадим фермионы в ящик $\Psi(x+L) = \Psi(x)$ $\qquad \boxed{\Psi = e^{ipx} U_p}$

$$\hat p\, \Psi_p = p\, \Psi_p \Rightarrow \boxed{p_n = \frac{2\pi}{L} n}$$

$$\boxed{\omega_n = \pm \sqrt{m^2 + \left(\frac{2\pi}{L} n\right)^2}}$$



} Массовая щель

Рассматриваем теорию произвольного числа частиц

Давайте проквантуем вторично теорию Дирака

$|\pm, n\rangle$ — Все состояния

$|+, n\rangle \leftrightarrow a_n$
$|-, n\rangle \leftrightarrow b_n$

Каждому состоянию ставим в соответствие опер-ры рождения и уничтожения

$|\Omega\rangle$ — "Вакуум" во вторичном квантовании
Не содержит частиц

$$\boxed{\hat H^{(0)} = \sum_n \omega_n \hat a_n^{\dagger} \hat a_n - \sum_n \hat b_n^{\dagger} \hat b_n \omega_n}$$

$$\boxed{\hat{a}_n|\Pi\rangle = \hat{b}_n|\Pi\rangle = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \{a_n, b_n\} &= 0 \\ \{a_n, a_m^+\} &= \delta_{mn} \\ \{b_n, b_m^+\} &= \delta_{mn} \end{aligned}}$$

$a_n^+|\Pi\rangle$ – Содержит одну ч-цу

$|\Pi\rangle$ – Не настоящий вакуум системы

$E \leftrightarrow min \mapsto$ Как можно больше уровней нужно заселить фермионами [с отр. энергией]

Min энергия

$$\boxed{|0\rangle = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^+ |0\rangle} \leftarrow \text{Состояние с минимальной энергией.}$$

Сделаем перенормировку $\hat{H}$ ← Будем энергию отсчитывать от энергии вакуума.

$$\boxed{\langle 0|H|0\rangle = 0} \qquad \boxed{H = H^{(0)} + Const}$$

↑ Бесконечна

Удобно делать по-другому: отнимать энергию вакуума

Заряд и т.д. тоже будем отсчитывать от вакуумных значений

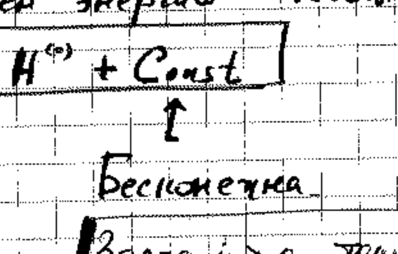
$$\boxed{\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \langle\Psi|H^{(0)}|\Psi\rangle - \langle 0|H^{(0)}|0\rangle}$$

Вакуум $|0\rangle$ обладает след. св-вами:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n|0\rangle &= 0 \\ b_n^+|0\rangle &= 0 \end{aligned}} \Longrightarrow$$

a_n – Опер-р уничтожения фермионов

b_n^+ – Опер-р уничтожения дырок.



a_n^+ – рождает фермион

b_n – рождает дырку

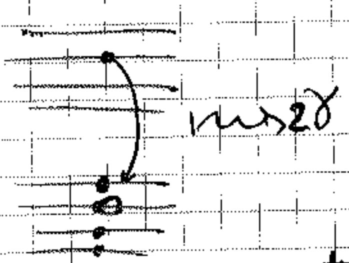
Систему заполненных отрицательных уровней называют морем Дирака

$b_n|0\rangle \leftrightarrow$ Частица с энергией (ω_p)
импульсом $(-p)$

Было убрано из вакуума ч-цы с импульсом p и энергией $(-\omega_p)$

Если фермион имеет заряд q, то антифермион $(-q)$

Аннигиляция фермиона и антифермиона



Есть и обратный пр-с.

Во всех таких процессах сохраняется

Фермионное число

$$\boxed{N_f = \#_f - \#_{af}}$$

$$\boxed{N_f = \sum_n a_n^+ a_n - \sum_n b_n b_n^+}$$

Ур-ние Дирака во внешнем Э/М поле

Парадокс Клейна

$$U(1): \quad \boxed{A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha}$$

$$\boxed{i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0}$$

$$\cancel{i\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\Psi = 0}$$

Общее правило:

Пусть фермион заряжен $\leftrightarrow$ находится в фундаментальном представлении $U(1)$

$$U(1) \quad \boxed{\Psi \mapsto e^{i\alpha}\Psi} \qquad \boxed{D_\mu = \partial_\mu + A_\mu}$$

$$\boxed{i\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\Psi = 0} \qquad \boxed{A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha / e}$$

Рассеяние электрона

$$\boxed{E - m \times V_0}$$

$$\boxed{i\partial_0\Psi = -i\alpha\partial_1\Psi + m\beta\Psi + eU(x)\Psi}$$

$$H_D = -i\alpha\partial_1 + m\beta + eU(x)$$

$$\boxed{\hat H\Psi = E\Psi}$$

$$\boxed{\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = -\sigma_z \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

(0) $\Psi_0 = U_p e^{ipx} + R\, U_{-p} e^{-ipx}$

$$U_p = N_p \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p\end{pmatrix} \qquad N_p = \frac{1}{\sqrt{\cancel{m^2} + 2\omega_p^2 + \cancel{p^2} + 2p\omega_p}}$$

$$U_{-p} = N_{-p}\begin{pmatrix} m \\ \omega_p - p\end{pmatrix} \qquad \boxed{N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p + p)}}}$$

$$\boxed{N_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p - p)}}}$$

$$(-\alpha p + m\beta)\Psi = \omega_p\Psi$$

$$\begin{pmatrix} p-\omega_p & m \\ m & -p-\omega_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ \omega_p - p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{+(p-\omega_p)m + (\omega_p - p)m} \\ \cancel{m^2 + p^2 - \omega_p^2}\end{pmatrix}$$

(1) $\Psi_1 = T\, U_{ik} e^{-kx}$

$$\boxed{U_{ik} = N_{ik}\begin{pmatrix} m \\ \omega_k + ik\end{pmatrix}} \qquad N_{ik} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + \omega_{ik}^2 + k^2}} = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

$\omega_{ik}^2 = m^2 - k^2$

$$\omega_{ik} = \sqrt{m^2 - k^2} = (E - eU_0)^2 \qquad \boxed{k^2 = m^2 - (E - eV_0)^2}$$

$$\begin{bmatrix} -ik - \omega_{ik} & m \\ m & +ik - \omega_k\end{bmatrix}\begin{pmatrix} m \\ \omega_k + ik\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{m^2} - \cancel{k^2} - \cancel{\omega_k^2}\end{pmatrix} = 0$$

$-m^2 + k^2$

$$m N_p + R\, m N_{-p} = N_{ik}\, T\, m$$

$$N_p(\underbrace{\omega_p}_{E} + p) + R N_{-p}(\underbrace{\omega_p}_{E} - p) = N_{ik}\, T\, (\underbrace{\omega_{ik}}_{E - eV_0} + ik)$$

$$\boxed{j = \psi^+ \alpha \psi} \leftarrow \text{Сохраняется}$$

$$-i\alpha \partial_x \psi + m\beta\psi + eU(x)\psi = E\psi$$

$$+i\,\partial_x \psi^+ \alpha + m\psi^+\beta + eU(x)\psi^+ = E\psi^+$$

$$\partial_x j = \partial_x \psi^+ \alpha \psi + \psi^+ \alpha\, \partial_x \psi =$$

$$= (-i)\left[\cancel{-m\psi^+\beta - eU(x)\psi^+} + \cancel{E\psi^+}\right]\psi +$$

$$+ i\psi^+\left[\cancel{-m\beta\psi - eU(x)\psi} + \cancel{E\psi}\right] = 0$$

$$\boxed{j_p = 0} \qquad 0 = \left(U_p^+ e^{-ipx_i} + R^* U_{-p}^+ e^{ipx_i}\right) \times \alpha \times$$

$$\times \left(U_p e^{ipx_i} + R U_{-p} e^{ipx_i}\right)$$

$$U_p^+ \alpha U_{-p} = N_p N_{-p} \left(m \;;\; \omega_p + p\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \omega_p - p \end{pmatrix} =$$

$$= N_p N_{-p} \left(-m^2 + \omega_p^2 - p^2\right) = 0$$

$$U_p^+ \alpha U_p = N_p^2 \left(m \quad \omega_p + p\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \omega_p + p \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_p(\omega_p + p)}}\right)^2 \left[-\cancel{m^2} + \cancel{\omega_p^2} + 2p^2 + 2p\omega_p\right] =$$

$$= p/\omega_p$$

$$U_p^+ \alpha U_{-p} = N_{-p}^2 \left(m \;;\; \omega_p - p\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \omega_p - p \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{2p}{2\omega_p \cancel{(\omega_p - p)}} \left(\cancel{-m^2 + \omega_p^2 + p^2 - 2\omega_p p}\right) = -p/\omega$$

II

$\boxed{|R|^2 = 1}$ $\quad N_p(p - ik + eV_0) = -RN_{-p}(-p - ik + eV_0)$

$$R = -\frac{N_p}{N_{-p}}\,\frac{p-ik+eV_0}{-p-ik+eV_0}$$

$$\boxed{R = -\sqrt{\frac{\omega_p - p}{\omega_p + p}}\,\frac{p-ik+eV_0}{-p-ik+eV_0}}$$

$$|R|^2 = \frac{E-p}{E+p}\,\frac{\cancel{p^2}+\cancel{(eV_0)^2}+2peV_0+\cancel{k^2}}{\cancel{p^2}+\cancel{(eV_0)^2}-2peV_0+\cancel{k^2}}$$

$k^2 \to \cancel{m^2} - (E-eV_0)^2 = -\cancel{E^2} - \cancel{e^2V_0^2} + 2EeV_0$

$k^2 \to \cancel{m^2} - \cancel{E^2} - \cancel{e^2V_0^2} + 2EeV_0$

$$= \frac{p+E}{-p+E}\,\frac{E-p}{E+p} = 1$$

Задача 1: ~~Вклад парадокс~~

Найти коэффициент прохождения и отражения в случае (Слабое поле)

а) $E - m > V_0 \mapsto$ Убедиться что $|T|^2 + |R|^2 = 1$

~~б) $E - m < V_0$ → убедиться что прохождение отсутствует $|R|^2 = 1$~~

$\boxed{V_0 < E+m}$ ← Слабое поле

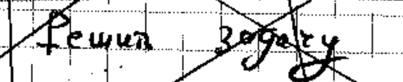
Сравнить ответ с ответом из КВ механики

~~Задача 2: Показать что ток вероятности~~

~~$$j = \Psi^+ \alpha \Psi$$~~

~~сохраняется. Вывести из него ур-ние $|R|^2+|T|^2=1$ для произвольного потенциала $U(x)$~~

Задача 3 Решить задачу в режиме ~~сильного~~ слабого поля.



$\boxed{\begin{matrix} E - m < V_0 \\ V_0 > E + m \end{matrix}}$ Определить вер-ти

Наблюдается ли парадокс Клейна?

Неабелевы теории $U(N)$

7ме

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \qquad \Psi \mapsto \omega \Psi$$

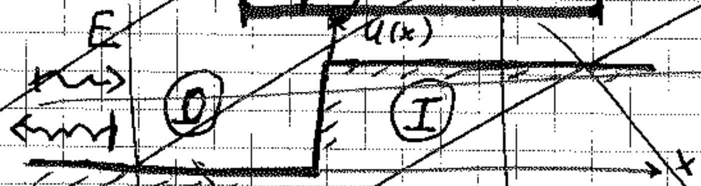
$$\boxed{i\gamma^\mu D_\mu \Psi = m\Psi} \qquad D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

$$A_\mu = -ig A_\mu^a t^a$$

$$\boxed{A_\mu \mapsto \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}}$$

Парадокс Клейна

$\boxed{T, R}$



$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = m\psi$$

(0) $$\boxed{\Psi = e^{ip_0 x}\psi_{p_0} + e^{-ip_0 x}\psi_{p_0}}\ R$$

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow \boxed{p_0 = \sqrt{E^2 - m^2}}$$

$\boxed{E > m}$

$$\boxed{\left(\psi_p^{(+)}\right)^+ \psi_p^{(+)} = 1}$$

(1) $$i\gamma^0(\partial_0 + ieU_0)\psi + i\gamma^1(\partial_x)\psi = \gamma^0 m\psi$$

$$i\partial_0\psi + eU_0\psi = -i\gamma^0\gamma^1\partial_1\psi + m\gamma^0\psi$$

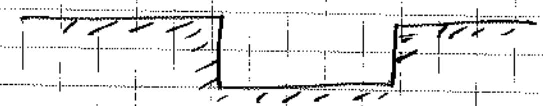
$$\boxed{H_D = -i\alpha\partial_1 + m\beta}\ \boxed{+eU_0}$$

$$\hat{H}_D\psi = E\psi$$

$$\boxed{e^{\pm ip_1 x}\psi^{(\pm)}_{p_1}} \leftarrow (E - eU_0)^2 = p_1^2 + m^2$$

$$\boxed{p_1 = \pm\sqrt{(E - eU_0)^2 - m^2}}$$

Задача 2. Слабое поле, найти уровни энергии в яме



Сравнить со случаем обычной 1D QM