Задачи к зачету по спецкурсу

"Классические калибровочные поля. Теории с фермионами."

(май 2008)

1. **Куда пропал заряд?**

   Рассмотрим (1+1)-мерные безмассовые фермионы с электрическим зарядом $e = +1$ в ящике с периодическими граничными условиями. Фермионы взаимодействуют с потенциалом
   $$A_0 = -Zf(x) , \qquad\qquad A_1 = 0 ,$$
   где $f(x) \geq 0$ — узкая функция, интеграл от которой равен 1 (гладкий аналог δ–функции).

   (a) Найти собственные значения и собственные функции гамильтониана Дирака. Можно ли отличить модели с $Z = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, проводя эксперименты по рассеянию фермионов?

   (b) Предположим, что в некотором эксперименте значение Z увеличивается адиабатически от $Z = 0$ до $Z = 2\pi$. Сохраняется ли при этом электрический заряд?

   (c) Вакуумом модели с $Z = 2\pi n$ будем называть состояние, в котором заполнены все фермионные уровни с отрицательной энергией. Вычислить плотность заряда вакуума:
   $$\rho(x) = \langle \hat{\psi}^+(x)\, \hat{\psi}(x) \rangle , \tag{1}$$
   где $\hat{\psi}(x)$ — вторичноквантованный фермионный оператор. Чему равен полный заряд вакуума?

   Указание. Вообще говоря, величина (1) равна бесконечности из-за присутствия бесконечного числа уровней в море Дирака. В качестве регуляризации можно использовать раздвижку точек операторов $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$:
   $$\rho(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\langle \hat{\psi}^+(x-\epsilon)\, \hat{\psi}(x+\epsilon) \rangle_{Z=2\pi m} - \langle \hat{\psi}^+(x-\epsilon)\, \hat{\psi}(x+\epsilon) \rangle_{Z=0} \right] ,$$
   где мы учли, что при $Z = 0$ вакуум обладает нулевой плотностью заряда.

2. **Критический заряд в модели с короткодействием.**

   Вообразим атом, связанный короткодействующим центрально-симметричным векторным полем
   $$A_0 = -Z\delta(r-R) , \qquad\qquad A_i(r) = 0 ,$$
   где R - радиус, а Z – заряд ядра. Заряд электрона по отношению к полю A_μ положен равным $e = +1$.

   (a) При каких значениях Z, R существуют связанные состояния электронов в поле ядра? Изобразить соответствующую область на плоскости $Z - R$. Найти энергию и волновую функцию основного состояния. Рассмотреть случаи $mR \gg 1$, $mR \ll 1$, где m - масса электрона.

(b) Найти критическое значение заряда $Z_c(R)$, при котором основной электронный уровень растворяется в дираковском море.

(c) Представим эксперимент, в котором заряд ядра изменяется от $Z = 0$ до $Z > Z_c$ за характерное время $\tau \gg m^{-1}$. Сколько частиц(античастиц) рождается в таком эксперименте? Рассмотреть случаи $\tau \gg R$, $\tau \ll R$.

3. **Рассеяние фермионов на космической струне.**
Рассмотрим $(2+1)$– мерные массивные фермионы с дробным электрическим зарядом $q > 0$. Фермионы помещены в потенциал Ааронова-Бома

$$A_0 = 0 \ , \qquad\qquad A_i = -\theta(r-R)\,\epsilon_{ij}\frac{n_j}{r} \ , \tag{2}$$

где R — размер центральной части потенциала. Можно грубо полагать, что поле (2) создано вихрем Абрикосова размера R. Ниже будем рассматривать два представления матриц Дирака

$$\alpha^1 = \sigma^1 \ , \qquad \alpha^2 = s\sigma^2 \ , \qquad \beta = \sigma^3 \ , \tag{3}$$

отличающиеся значением параметра $s = \pm 1$.

- Показать, что представления (3) не эквивалентны, т.е. не могут быть переведены друг в друга преобразованием

$$\alpha^i \to U\alpha^i U^+ \ , \qquad\qquad \beta \to U\beta U^+ \ ,$$

  где U– унитарная матрица. Параметр s будем отождествлять с удвоенным спином фермиона.

- Рассмотрим фермионы в поле вихря нулевого размера, $R = 0$. Наложив условие регулярности волновой функции при $r = 0$, найти точные решения уравнения Дирака. Вычислить амплитуду рассеяния на вихре фермиона, который изначально двигался вдоль координаты x^1. Зависит ли амплитуда от параметра s?

- Рассмотрим теперь вихрь конечного, но малого размера. Используя условие сшивки при $r = R$, найти собственноэнергетические волновые функции фермионов, "выживающие" в пределе $R \to 0$. Совпадают ли они с волновыми функциями, полученными в предыдущем пункте? Найти амплитуду рассеяния на вихре конечного, но малого размера.

Теперь рассмотрим $(3+1)$– мерное пространство-время. Потенциалу (2) в этом случае соответствует космическая струна — одномерный объект, электрическое поле которого обладает свойством трансляционной инвариантности вдоль координаты x^3 ($A_3 = 0$, а остальные компоненты A_μ даются выражением (2)).

(a) Показать, что волновые функции фермионов, обладающих нулевым импульсом вдоль координаты x^3, описываются $(2+1)$– мерным уравнением Дирака, причем два уравнения с $s=\pm 1$ описывают две независимые поляризации $\psi_\pm$ четырехмерного фермиона. Показать, что проекция спина на координату x^3 представима в виде $\hat{s}^3 = s\sigma^3/2$. Ниже будем использовать линейно поляризованные фермионы

$$\psi_\gamma = \cos\gamma\psi_+ + \sin\gamma\psi_- \ .$$

(b) Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma(\psi_\gamma \to \psi_{\gamma'})$ поляризованных фермионов на космической струне.

4. **Аксиальная аномалия.**
Рассмотрим заряженные безмассовые фермионы в кубическом ящике большого размера L в (3+1)-мерном пространстве во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном вдоль оси z. Пусть на некоторое время τ на систему накладывается однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль оси z. Найти изменение чисел правых и левых фермионов. Связать это изменение с

$$\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\, d^4x \propto \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\, d^4x,$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$. Считать, что $eH \gg (2\pi/L)^2$, включение и выключение поля производится адиабатически, а время переключений много меньше τ.

5. **Восстановление симметрии в плотной фермионной среде.**
Рассмотрим четырехмерную теорию действительного скалярного поля φ, взаимодействующего с одним типом дираковских фермионов. Действие скалярного поля выберем в виде

$$S_\varphi = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2 - \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2\right] \ ,$$

а фермионное действие — в виде

$$S_\psi = \int d^4x \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - f\varphi\bar{\psi}\psi\right) \ .$$

Константы связи λ и f предполагаются малыми.

(a) Показать, что в теории имеется дискретная симметрия $\varphi \to -\varphi$. Эта симметрия спонтанно нарушена вакуумами теории.

(b) Рассмотрим систему при конечной плотности фермионов n_F. Найти плотность энергии фермионной среды $\varepsilon_F(\varphi)$ в произвольном однородном внешнем поле φ, если плотность числа фермионов равна n_F.

(c) Изобразить качественно зависимость полной плотности энергии системы

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^2 - v^2)^2 + \varepsilon_F(\varphi)$$

от поля φ при различных n_F. Рассмотреть случаи $\lambda \ll f^4$, $\lambda \gg f^4$.

(d) Для двух предельных случаев предыдущего пункта найти значение n_F, при котором симметрия восстанавливается, т. е. $V_{\text{eff}}(\varphi)$ имеет глобальный минимум в точке $\varphi = 0$. Найти соответствующую критическую плотность.

6. **Нарушение фермионного числа в холодной плотной фермионной среде.** Рассмотрим абелеву модель Хиггса в (1+1)–мерном пространстве-времени. Включим в нее безмассовые фермионы с действием

$$S_\psi = \int d^2x\, i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ie\gamma^5 A_\mu)\psi.$$

(a) Найти правила суперотбора для инстантонных процессов в данной модели.

(b) Рассмотрим систему с конечной плотностью фермионов n_F, где плотности левых и правых фермионов равны (при этом полный калибровочный заряд равен нулю). Пусть конфигурация калибровочного поля изменяется адиабатически от $A_1 = 0$ до некоторого $A_1 = A_1(x^1)$ (используем калибровку $A_0 = 0$). Вычислить изменение энергии фермионной среды, т. е. вклад фермионов в статическую энергию как функционал от $A_1(x^1)$. [Указание. Энергию конфигурации, в которой заполнены все фермионные уровни с отрицательной энергией, считать нулевой.]

(c) Используя полученное в предыдущем пункте выражение, найти “вакуумные” состояния модели при конечной плотности фермионов - локальные минимумы функционала энергии. Какие фермионные числа можно приписать этим вакуумам (см. задачу 1)?

(d) Какие инстантонные процессы энергетически разрешены в данной модели, а какие - запрещены? Найти соответствующие правила отбора.

(e) Пусть в результате некоторого процесса система оказалась в состоянии с плотностью фермионов n_F, $A_\mu = 0$ и $\phi = v$. Показать, что при фермионных плотностях, превышающих некоторое критическое значение $(n_F)_c$, классически разрешено значительное нарушение барионного числа, $\Delta n_F \sim n_F$. Найти $(n_F)_c$. Вакуумное значение поля Хиггса считать большим, $v \gg 1$.

7. **Сверхпроводящая доменная стенка.**
Рассмотрим теорию, описывающую электромагнитное поле A_μ, заряженное скалярное поле χ и нейтральное скалярное поле ϕ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\chi|^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi, \chi)\ .$$

где $D_\mu\chi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\chi$. Скалярный потенциал выберем в виде

$$V(\phi,\chi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^2 + \left|\frac{\partial W}{\partial\chi}\right|^2 ,$$
$$W(\phi,\chi) = \frac{\lambda}{3}\phi^3 - v^2\phi + g\phi|\chi|^2 ,$$

где λ, g, v^2 — положительные параметры.

Сначала рассмотрим теорию в $(1+1)$–мерном пространстве-времени.

(a) Найти множество вакуумов теории и массы полей в окрестности каждого вакуума.

(b) Провести топологическую классификацию полевых конфигураций с конечной энергией. Показать, что в каждом топологическом секторе существует статическое решение (солитон), отвечающее минимуму функционала энергии. Устойчивы ли эти решения? Найти массы солитонов.

(c) Найти солитонные решения в явном виде для случая $g = 2\lambda$.

(d) Добавим к скалярному потенциалу слагаемое

$$V_1(\phi,\chi) = -\epsilon_1\phi^2|\chi|^2 + \epsilon_2 v^2|\chi|^2 ,$$

причем параметры ϵ_1, ϵ_2 будем считать малыми, $\epsilon_1, \epsilon_2 \ll \lambda^2, g^2$. Показать, что при некоторых значениях параметров ϵ_1, ϵ_2 в теории существует единственный солитон $\phi = \phi_s(x_1)$, $\chi = \chi_s(x_1)$, где функция $\chi_s(x_1)$ отлична от нуля и локализована в центре солитона.

Солитону, изученному в пункте 7d задачи, соответствует в случае $(3+1)$-мерного пространства-времени доменная стенка — решение уравнений поля, имеющее профиль солитона вдоль координаты x_1 и не зависящее от x_0, x_2, x_3; такая стенка является двумерной поверхностью, на которой локализовано поле χ.

- Поле χ несет электрический заряд, поэтому по доменной стенке может протекать ток. Показать, что доменная стенка является сверхпроводящей, т.е. существует решение с нулевой плотностью заряда и незатухающим электрическим током
$$J_z = -ie\left(\chi^* D_\mu\chi - \chi D_\mu\chi^*\right) ,$$
локализованным на стенке. При всех ли значениях тока есть решение? Что происходит при включении электрического поля $\mathbf{E} = (0, E_2, E_3)$, направленного вдоль доменной стенки?

- Показать, что имеется критическое значение J^c плотности поверхностного тока через стенку, выше которого сверхпроводимость нарушается. Оценить J^c, считая, что ϵ_1, ϵ_2 — величины одного порядка и $g = 2\lambda$.

8. **Нулевые фермионные моды в поле сфалерона.**
Рассмотрим четырехмерную теорию с калибровочной группой SU(2) и хиггсовским дублетом. Включим в нее безмассовые изодублетные дираковские фермионы с действием

$$S_\psi = \int d^4x\, i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi \ .$$

Рассмотрим уравнение Дирака во внешнем поле сфалерона:

$$A_i(x) = -i\epsilon_{ija} n_j \tau_a \frac{f(r)}{r} \ , \qquad \varphi(x) = -i\tau_a n_a \varphi_0 h(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

где r– радиус-вектор, $n_i = x_i/r$.

(a) Используя симметрии сфалеронного поля, найти аналог сохраняющегося углового момента фермиона.

(b) Ограничиваясь фермионами с минимальным угловым моментом, показать, что в поле сфалерона имеются нулевые моды дираковского гамильтониана (собственные функции с нулевой энергией). Найти количество нулевых мод каждой киральности.

(c) Дать интерпретацию нулевых мод в терминах пересечения уровней.