Правила Фейнмана

$$\boxed{I = N \int [dA]\,[dc^+ dc]\; e^{\,i S_\alpha[A]}}$$

$$\boxed{S_\alpha[A] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2 - c^+ \partial_\mu D_\mu c + \frac{1}{\alpha}\mathrm{tr}(\partial_\mu A_\mu)^2}$$

Гранусловия в ф-нальном интеграле

$\boxed{t \mapsto \pm\infty}$ $\qquad \partial_i A_i^a = 0 \qquad$ A_0 - множитель Лагранжа

От него ВФ не зависит

Классическое поле

$$A_\mu^a = \int d^3k\; A_\mu^a(\vec{k}, t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k_i A_i^a = 0 \\ A_0 = 0 \end{array}}$$

Если бы не вводили множитель Лагранжа
Не было бы A_0

$$A_i^a(\vec{x}, t) = \int d^3k\; A_i^a(\vec{k}, t)$$

$$\begin{cases} \dot{A}_i^a + i\,|\vec{k}|\,A_i^a \Rightarrow 0 & \text{при } t \mapsto +\infty \\ \dot{A}_i^a - i\,|\vec{k}|\,A_i^a = 0 & \text{при } t \mapsto -\infty \end{cases}$$

Производящий функционал для ф-й Грина

$$Z[J_a^\mu] = \int [dA]\,[dc^+ dc]\; e^{\,i S_\alpha[A] + i\int J_a^\mu A_\mu^a\, dx}$$

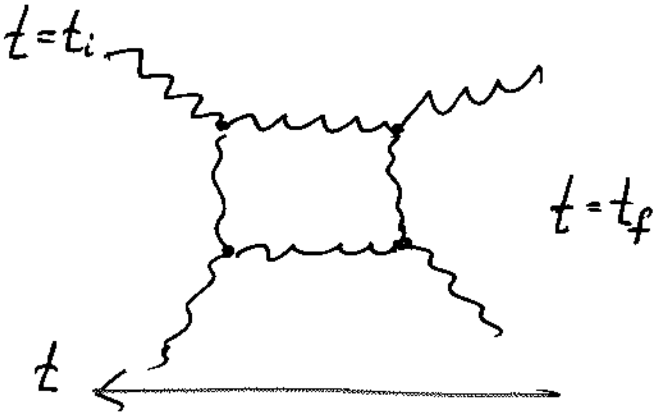
$$\langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)\rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z}{i\,\delta J^\mu_a(x)\, i\,\delta J^\nu_b(y)}\Bigg|_{J=0} =$$

$$= [redacted] \frac{\int [dA][dc^+dc]\, e^{iS_\alpha[A]} A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)}{\int [dA][dc^+dc]\, e^{iS_\alpha[A]}}$$

Далее – Ф-ции Грина связываем с начальными и конечными частицами по ф-ле LSZ!

~~Свободный пропагатор~~

$$\cancel{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu}$$



$$\langle 0|\underbrace{a_{a_3 s_3}\, a_{a_4 s_4}}_{t \mapsto +\infty}\ \hat{S}\ \underbrace{a^+ a^+_{a_1 s_1 a_2 s_2}}_{t \mapsto -\infty}|0\rangle$$

Не забываем, что при $\left\{\begin{matrix} t = t_i \\ t = t_f \end{matrix}\right\}$ поле свободно

$\Downarrow$

$$A^a_\mu(\vec{x}, t_i) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\vec{k}|}} \Big[e^s_\mu(\vec{k})\, e^{i|\vec{k}|t - i\vec{k}\vec{x}}\, a^{a*}_s(\vec{k}) + e^{s*}_\mu(\vec{k})\, e^{-i|\vec{k}|t + i\vec{k}\vec{x}}\, a^a_s(\vec{k}) \Big]$$

$$\boxed{\begin{matrix} k_i e^s_i = 0 \\ e^s_0 = 0 \end{matrix}} \longleftrightarrow \text{Калибровочные условия}$$

VI

Когда мы посчитали диаграмму, нужно

1. Отрезать ноги — пропагаторы
2. Вставить вершины $\overset{\leftarrow p}{\sim\sim\sim} = e_\mu^{a s}(k)$ initial time.
3. Посадить внешние импульсы на массовую пов-ть $\underset{\rightarrow p}{\sim\sim\sim} = e_{\mu'}^{a s *}(k)$.

$\boxed{\text{Удовлетворяет } A_0 = 0 \text{ Поперечность}}$

$\Rightarrow$ Амплитуда.

~~Пропагаторы~~

$$\cancel{Z[J] = \int [dA][dc^+dc]\, e^{iS_{free}[A,c,c^+] + i\int \mathcal{L}_{int}\, d^4x + i\int JA\, d^4x} =}$$

$$\cancel{= \sum_{n=0}^{\infty} \int [dA][dc^+dc]\, e^{iS_{free}[A,c,c^+] + i\int JA\, d^4x} \left(i\int \mathcal{L}_{int}[A]\, d^4x\right)}$$

Теория возмущений

Введём токи к гостам

$$Z[J, J^c, J^{c^+}] = \int [dA][dc^+dc]\, e^{iS_{free}[A,c^+,c]} \times$$

$$\times\, e^{i\int \left(J^\mu A_\mu + J^{c^+} c + c^+ J^c\right) d^4x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\int \mathcal{L}_{int}(A_\mu, c, c^+)\, d^4x\right)^n}{n!}$$

$A_\mu \mapsto \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^\mu}$	$c^+ \mapsto +\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}$
$c \mapsto -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^+}$	

$$Z[J, J^c, J^{c+}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i \int \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} ; -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{c+}_{(x)}} ; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^c_{(x)}} \right) d^4x \right)^n \times$$

$$\times \underbrace{\int [dA][dc^+ dc] \; e^{i S_{free}[A, c, c^+] + i \int \left(J^\mu A_\mu + J^{c+} c + c^+ J^c \right) d^4x}}$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{2} A^a_\mu(x) A^b_\nu(y) \, \mathcal{D}^{ab}_{\mu\nu}(x-y) + \frac{i}{2} c^+ D^c(x-y) c \right\}$$

$$S_{free} = \int \left(-\frac{1}{4} (F^a_{\mu\nu})^2 - \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^a_\mu)^2 - c^+ \partial_\mu D_\mu c \right) \Big|_{2nd\ order}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \cancel{+ g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu}$$

$$D_\mu c^a = \partial_\mu c^a \cancel{+ g f^{abc} A^b_\mu c^c}$$

$$S_{free} = \int \left(\underbrace{-\frac{1}{4} (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 - \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^a_\mu)^2} - c^+ \Box c \right) d^4x$$

$$-\frac{1}{2} (\partial_\mu A^a_\nu)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu A^a_\mu \partial_\nu A^a_\nu - \frac{\alpha}{2} (\partial_\mu A^a_\mu)^2}_{\frac{1-\alpha}{2} (\partial_\mu A^a_\mu)^2}$$

$$+ \frac{1}{2} A^a_\mu \left(\eta_{\mu\nu} \Box + (\alpha - 1) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^a_\nu$$

$Z_{free}[J, J^c, J^{c+}] =$

$$= \int [dA]\,[dc^+ dc]\; e^{\,i\int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A^a_\mu \left(\Box \eta_{\mu\nu} + (\alpha-1)\partial_\mu\partial_\nu \right) A^a_\nu - c^+\Box c + J^a_\mu A^a_\mu + J^{c+} c + c^+ J^c \right\}}$$

$$\boxed{A^{a}_\mu = A^{a'}_\mu(x) + i\int dy\; D^{ab}_{\mu\nu}(x-y)\, J^b_\nu(y)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ D^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab} D_{\mu\nu}(x-y) \\ &2)\ \left(-\Box \eta_{\mu\lambda} + \partial_\mu\partial_\nu(\alpha-1)\right) D^{ab}_{\lambda\nu}(x-y) = i\,\delta(x-y) \end{aligned}}$$

Этих условий недостаточно! Есть решения однородного ур-ния.

$$\boxed{\left(-\Box \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu(\alpha-1)\right) D^{ab}_{\lambda\nu}(x-y) = 0}$$

Эти решения отличают разные ф-ции Грина.

Почему нам нужна именно причинная ф-ция Грина?

$\oplus$

Гранусловие!

$$A^a_\mu(\vec{x},t) = A^{a'}_\mu(\vec{x},t) + \int d^3k\, dt_y\, d\vec{y} \int d^4q\; D^{ab}_{\mu\nu}(q)\, e^{-iq(x-y)}$$

$$\times\, e^{i\vec{k}\vec{x}} \int d^4s\; J^b_\nu(\vec{s}, t_y)\, e^{-i\vec{s}\vec{y} + i t_y s_0}$$

$$= A^{a'}_\mu(\vec{x},t) - \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{x}} \int d^4q\, \cancel{d^4s}\; D^{ab}_{\mu\nu}(q)\,(2\pi)^4\, J^b_\nu(q)\, \cancel{\delta(s-q)}$$

$$e^{iqx}$$

$$\underbrace{A^a_\mu(\vec k,t)} = \underbrace{A^{a'}_\mu(\vec k,t)} - \int d^4 k^0\, D^{ab}_{\mu\nu}(k)\, e^{ikt}\, J^b_\nu(k).$$

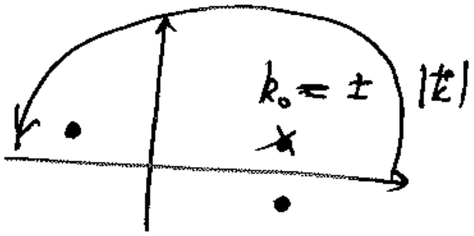
$$\boxed{t=t_f} \Rightarrow \boxed{\dot A^a_\mu + i|\vec k|\, A^a_\mu = 0}$$

Если $\left[\begin{array}{l} A^a_\mu \text{ - удовл. гран.условиям} \\ A^{a'}_\mu \text{ - удовл. гран.условиям} \end{array}\right]$ $\leftrightarrow$ $\boxed{\text{Объяснение откладываем}}$

То $\int dk^0 \left(\underline{D^{ab}_{\mu\nu}(k)}\, e^{ik_0 t_f}$ [redacted] $J^b_\nu(k) (k_0 + |\vec k|) \right) \Rightarrow 0.$

при $\boxed{t_f \mapsto +\infty}$

$$\boxed{\frac{i f_{\mu\nu}(\vec k)}{k_0^2 - \vec k^2 + i0} = D^{ab}_{\mu\nu}(k)\ \Big|\ J^b_\nu(k)}$$



По лемме Жордана $\Rightarrow$ Все полюса должны обходиться правильным способом.

$$\boxed{D^{ab}_{\mu\nu} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(\eta_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}\right)}$$

$$\cancel{D^{ab}_{\mu\nu} \mapsto D^{ab}_{\mu\nu} + \delta(k^2)\left[\eta_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}\right]}$$

$$\cancel{\left(k^2\eta_{\mu\lambda} + k_\mu k_\lambda(\alpha-1)\right)\delta(k^2)\eta_{\lambda\nu} + \left(k^2\eta_{\mu\lambda} + k_\mu k_\lambda(\alpha-1)\right)\delta(k^2)\frac{k_\lambda k_\nu}{k^2+i0}}$$

$k_\mu k_\nu$

Решение Однородного

$$\left(k^2\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu(\alpha-1)\right)A_\nu = 0$$

$$\cancel{k^2(kA)} + k^2(kA)(\alpha-\cancel{1}) = 0 \qquad \boxed{\alpha \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

Либо $\boxed{k^2=0}$ либо $\boxed{kA=0}$

① $\boxed{k^2=0}$

η_μ [redacted], k_μ, $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$

$$\boxed{A_\mu(k) = \left[k_\mu A^{(k)}_\mu + e^{(1)}_\mu A^{(1)}_\mu(k) + e^{(2)}_\mu A^{(2)}_\mu(k)\right]\delta(k^2)}$$

② $\cancel{\boxed{(kA)=0}}$, $\boxed{k^2\neq 0} \Rightarrow (kA)=0$

$$A = A^{(i)}_\mu e^{(i)}_\mu \qquad (k e^{(i)})=0$$

$$k^2 A^{(i)} e^{(i)}_\mu = 0 \Rightarrow \boxed{A^{(i)} \propto \delta(k^2)}$$

$$\boxed{\int \delta(k^2)\, e^{ik_0 t_f} f(\vec{k})\left(k_0 + |\vec{k}|\right) = 2|\vec{k}|\, e^{i|\vec{k}|t_f} f(\vec{k}) \neq 0}$$

$$\Downarrow$$

Все остальные ф-ции Грина не подходят!

Зачем требовать чтобы $A_\mu^{a'}$ уд. Фейнмановским

трансф?

$$\frac{i}{2}\left(A'(\Box+\partial_\mu\partial_\nu(\alpha-1))A'\right) + \frac{i}{2} J D J .$$

$$Z_{fre} = \frac{\int [dA'][dc^+ dc]\, e^{\frac{i}{2}\hat{A}A + JA\,(\Box+\partial_\mu\partial_\nu(\alpha-1))}}{\int [dA\, dc^+ dc]\; e^{iA(\Box+\partial\partial(\alpha-1))A}}$$

$\int[dA']$ должен сократиться теперь с $\int[dA]$

⇓

Одни и те же преобразования не зависящие от J (!).

$$Z_{free} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int J_\mu^a(x)\, D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)\, J_\nu^b(y)\, dx\, dy + \right.$$

$$\left. + i\int J^{c+}(x)\, D_c(x-y)\, J_c(y)\, d^4x\right\}$$

$$\boxed{D_c(k) = \frac{i}{k^2+i0}}$$

Итак

$$Z[J] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}\cdots\right)d^4x\right)^n \frac{1}{n!}\ \times$$

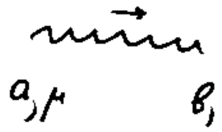
$$\times\ \exp\left\{-\frac{i}{2}\int J_\mu^a(x)\, D_{\mu\nu}^{ab}(x-y)\, J_\nu^b(y)\, dx\, dy\right.$$

$$\left. + 2i\int J^{c+a}(x)\, D_c^{ab}(x-y)\, J^{cb}(y)\, d^4x\right\}$$

$$\mathcal{L}_{int,c} = \bar{c}^a(-\partial_\mu)\left(\text{[redacted]} + g f^{abc} A^b_\mu c^c\right) =$$

$$= \partial_\mu \bar{c}^a g f^{abc} A^b_\mu c^c$$

$$= \langle T c^b_{(x)} \bar{c}^a_{(y)} \rangle = \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i0} e^{-ik(x-y)}$$



$$= \langle T A^a_\mu A^b_\nu \rangle = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha-1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}\right)$$

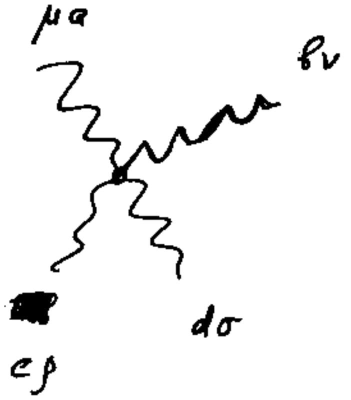
$$+ i g f^{abc}(\mp i k_\mu)\,\text{[redacted]} = -g f^{abc} k_\mu .$$

$$\mathcal{L}_{int,A} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 - \cancel{\frac{\alpha}{2}\left(\partial_\mu A^a_\mu\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right) g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu -$$

$$- \underbrace{\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{adf} A^b_\mu A^c_\nu A^d_\mu A^f_\nu}$$



4! способов прилепить эту вершину

$(bc) \leftrightarrow (df)$ Симметрия

$bc \mapsto cb$

$df \mapsto fd$ Симметрия

В 4 раза

Осталось 6 способов

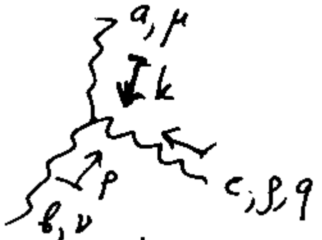
$$-\frac{1}{4} g^2 f^{gab} f^{gcd} \left(A^a_\mu A^b_\nu A^c_\mu A^d_\nu\right).$$

$\Downarrow$

$$-ig^2 \Big(f^{gab} f^{gcd} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})$$
$$+ f^{gac} f^{gbd} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})$$
$$+ f^{gad} f^{gbc} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}) \Big).$$

Вершина ~~[illegible]~~ по $abcd$.

Получена перебором индексов



В 2 раза больше ↔ Перестановка $A^b_\mu A^c_\nu$.

$\boxed{\partial \mapsto (-ik) \Rightarrow (+i) \text{ сократится}}$

Перестановка a, b, c ⟶ 3 члена.

$$f^{abc} g \Big\{ \cancel{f^{abc}} \left[(k_\mu \delta_{\nu,=} - k_= \delta_{\mu,0} \right] \delta_{\nu,0}\, \delta_{\rho,=}$$
$$+ \cancel{f^{bac}} \left[(k_\nu \delta_{\mu\rho} - k_\rho \delta_{\mu\nu}) \right.$$
$$+ \cancel{f^{cba}} \left[p_\mu \delta_{\nu\rho} - p_\rho \delta_{\mu\nu} \right]$$
$$\left[q_\nu \delta_{\mu\rho} - q_\mu \delta_{\nu\rho} \right] \Big\}$$

$$= -g f^{abc} \Big\{ g_{\mu\rho} (k - q)_\nu + g_{\mu\nu} (p - k)_\rho + g_{\nu\rho} (q - p)_\mu \Big\}.$$

Фермионы:

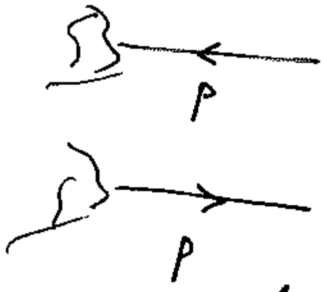
$$\int [d\bar\Psi][d\Psi]\; e^{iS_\Psi[\Psi,A]}.$$

$$\boxed{S_\Psi = i\bar\Psi\gamma^\mu D_\mu\Psi}$$

$$\Psi = \Psi_\alpha$$

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + igA^a_\mu t^a\Psi.$$

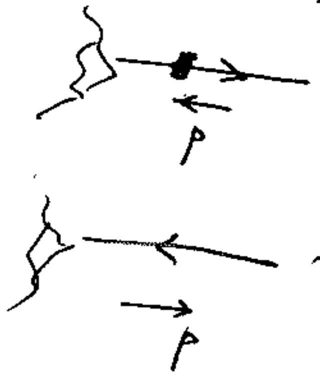
Фермионы



$u^s_\alpha(p)$ (initial)

$\bar u^s_\alpha(p)$ (final)

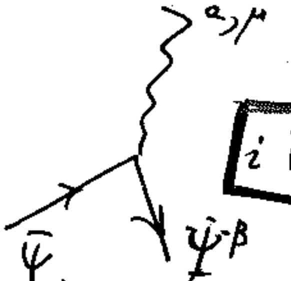
Антифермионы



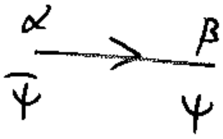
$\bar v^s_\alpha(p)$ (initial)

$v^s_\alpha(p)$ (final).

Сорт α часто называется **цветом**



$$\boxed{i\gamma^\mu g\, t^a_{\alpha\beta}}$$



$$\delta_{\alpha\beta}\frac{i}{\hat p - m} = \langle \Psi\bar\Psi\rangle$$

---

[3] β-ф-ция

---

def Теория с калиб. группой $SU(3)$ называется **Хромодинамикой**

def Теория с калибр. группой $\boxed{SU(3)}$

$\boxed{\text{8 генераторов}}$ + 6 фермионов 3-х цветных

u 10MeV	c	t 200GeV
d 5MeV	s	b 4.5GeV

С большой степенью безмассовые — Лёгкие кварки

$m < \Lambda_{QCD}$