Лекция Духи & Ковариантная теория возмущений

$$\boxed{I = \int [dA_\mu^a]\, \delta(\partial_i A_i^a)\, \det \hat{M}^{ab}\, e^{iS[A]}}$$

$S[A] = \int d^4x\, \frac{1}{2} \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})$.

Изменение обозначений

$$\boxed{\hat{M}^{ab} = +\Delta\, \delta^{ab} + g f^{acd} A_i^d\, \partial_i} \qquad \hat{M}^{ab} = D_i \partial_i$$

~~Континуальный интеграл по Ферми-полям~~

~~Уже это проходили! SUSY & Славнов~~

~~Повторение~~

Функциональный интеграл имеет не Лоренц-инвариантный вид. $\boxed{M_L^{ab} = -D_\mu \partial_\mu}$

Давайте восстановим $\boxed{\text{Лоренц-инвариантность с помощью единички Фаддеева-Попова}}$

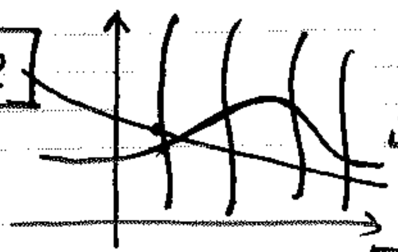
Нужно выбрать релятивистски-инвариантную калибровку

Примеры. $\boxed{\partial_\mu A_\mu^a = 0}$ Условие Лоренца

ED. - Калибровка Ландау

α-калибровка.

$\boxed{\partial_\mu A_\mu = 0}$



$L A_\mu^a$

$\chi_k = 0$

$\boxed{\text{Условия фиксирующие калибровку}}$

Каждой конфигурации A_μ^a удовл. условию $\boxed{\partial_i A_i^a = 0}$ можно сопоставить калибр./эквивалентную конфигурацию, удовл. условию $\boxed{\partial_\mu A_\mu^a = 0}$

Попытаемся перенести ф-нальный инт-л с одной поверхности на другую

Единичка Фаддеева–Попова

$$\Delta_L(A) \int \Big\{ \prod_{x,a} \delta(\partial_\mu A_\mu^{a\,\omega}(x)) \Big\} [d\omega] = 1$$

Определяем эту величину.

$$\boxed{A_\mu^\omega(x) = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

$$F_{\mu\nu}^\omega = \cancel{(\partial_\mu \omega) A_\nu \omega^{-1}} + \omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} +$$

$$+ \cancel{\omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1}} + \cancel{\partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1}} - \cancel{\omega \partial_\mu \partial_\nu \omega^{-1}} +$$

$$+ \omega A_\mu \cancel{\omega^{-1} \omega} A_\nu \omega^{-1} + \cancel{\omega A_\mu \omega^{-1} \omega \partial_\nu \omega^{-1}} +$$

$$+ \cancel{\partial_\mu \omega \, \omega^{-1} \omega} A_\nu \omega^{-1} + \cancel{\partial_\mu \omega \, \omega^{-1} \omega \partial_\nu \omega^{-1}} -$$

$$- (\mu \leftrightarrow \nu) =$$

$$= \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1} \qquad \text{ok}$$

$$\boxed{d\omega = \int \prod_x d\omega(x)}$$ Мера калибровочной группы

Требуем: Инвариантность: $\boxed{\begin{aligned} d(\omega\omega_0) &= d\omega \\ d(\omega_0\omega) &= d\omega \end{aligned}}$

Пример: группа $SU(2) = S(3)$ $\quad \frac{\tau^a}{2}$ - генераторы

$$\omega = \exp\left\{ i \frac{\tau^a}{2} \alpha^a \right\} =$$

$$= \cos\left(\frac{|\alpha|}{2}\right) + i \frac{\tau^a \alpha^a}{|\alpha|} \sin\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)$$

$$\omega^+ \omega = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \tau^a n^a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \left(\cos(\alpha/2) + i \tau^a n^a \sin(\alpha/2) \right) =$$

$$= \cos^2(\alpha/2) + \cancel{i \tau^a n^a \cos(\alpha/2) \sin(\alpha/2) - i \tau^a n^a \cos \sin} + \sin^2(\alpha/2) = 1$$

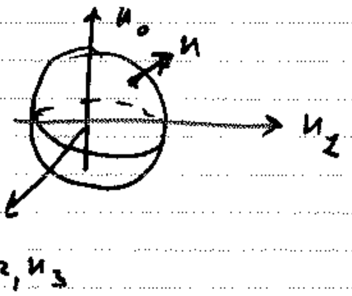
$$\boxed{\{\tau^a, \tau^b\} = 2\delta^{ab}} \quad (\tau^1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega &= n_\mu \sigma^\mu \\ \omega^+ &= n_\mu \bar\sigma^\mu\end{aligned}} \qquad \boxed{\sigma^\mu = (I, \; i\tau^a)}$$

$$\bar\sigma^\mu = (I, -i\tau^a) = \sigma^{\mu +}$$

$$\sum_\mu n_\mu^2 = 1$$

$$\boxed{\{\bar\sigma^\mu, \sigma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}}$$



Есть нормальная Евклидова Мера

y^1, y^2, y^3 - Координаты на сфере.

$$ds^2 = \sum dn_\mu^2 = \sum_{\mu,\alpha} \frac{\partial n_\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial n_\mu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

$$\boxed{\int dS = \int dy_1 dy_2 dy_3 \sqrt{\det\left(\frac{\partial n_\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial n_\mu}{\partial y_\beta}\right)}}$$

$$d\omega = tr\left[(g^{-1}dg)\wedge(g^{-1}dg)\wedge(g^{-1}dg)\right] =$$

$$= -dg^{-1}\wedge \cancel{g g^{-1}} dg \wedge g^{-1}dg\Big|_{tr}$$

$$g^{-1}dg = -dg^{-1}\cdot g$$

$$= - tr\left(\bar\sigma^\mu \sigma^\nu \bar\sigma^\lambda \sigma^\delta\right) dn^\mu \wedge dn^\nu \wedge dn^\delta n^\lambda =$$

$$\sigma^\mu \sigma^{\nu +} = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu a}\tau^a$$

$$= -i\,\eta_{\delta\mu a}\, tr\left(\tau^a \underbrace{\sigma^\nu \bar\sigma^\lambda}_{\cancel{\delta^{\nu\lambda}} + i\eta_{\nu\lambda b}\tau^b}\right) dn^\mu \wedge dn^\nu \wedge dn^\delta n^\lambda$$

$$= 2\,\eta_{\delta\mu a}\eta_{\nu\lambda a}\left(dn^\mu \wedge dn^\nu \wedge dn^\delta\right) n^\lambda =$$

$$tr(\tau^a\tau^b) = 2$$

$$\cancel{+ \eta_{0ia}\eta_{0ja}\, 2\, dn^0 \wedge dn^i \wedge (dn^0 n^j - dn^j n^0)}$$

$$\cancel{+ \eta_{0ia}\eta_{kla}\, 2\, dn^0 \wedge dn^i \wedge dn^k n^l}$$

$$n^0 = \sqrt{1-n_1^2-n_2^2-n_3^2} = \sqrt{1-\sum n_i^2}$$

$$d\omega = \underbrace{\zeta_{oia}\,\zeta_{oja}}_{\delta_{ij}} \cancel{2\,dn^0 \wedge dn^i \wedge (dn^0 n^j - dn^j n^0)} \xrightarrow{} 0 \; +$$

$$+ \cancel{\zeta_{oia}\,\zeta_{kje}}^{\varepsilon_{kji}}\; 2\,dn^0 \wedge dn^i \wedge (dn^k n^j - \boxed{\cancel{dn^j n^k}}) \,.$$

$$+ \cancel{\zeta_{kje}\,\zeta_{oia}}^{\varepsilon_{kji}}\; dn^k \wedge dn^j (dn^0 \wedge n^i - dn^i \wedge n^0)$$

$$+ \cancel{\zeta_{kja}\,\zeta_{eia}\; dn^k \wedge dn^j \wedge (dn^e n^i \boxed{- dn^i n^e})} \xrightarrow{} 0.$$

$$\cancel{\delta_{ke}}\,\delta_{ji} - \cancel{\delta_{ki}\,\delta_{je}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta_{oia} &= \delta_{ia} \\ \zeta_{ija} &= \varepsilon_{ija} \end{aligned}} \qquad dn^0 = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-\sum n_i^2}} \left(-\cancel{2} n_j\, dn_j\right) = -\frac{n_j}{n_0}\, dn_j$$

$$d\omega = \sum_{kij} \varepsilon_{kji}\; 2 \left(-\frac{(n_e)^2}{n_0} dn_e\right) \wedge dn^i \wedge dn^k \cancel{n^j}$$

$$+ \varepsilon_{kji}\; dn^k \wedge dn^j\; n^i \wedge \left(-\frac{(n_e)^2}{n_0} dn_e\right) -$$

$$- \varepsilon_{kji}\; dn^k \wedge dn^j \wedge dn^i \frac{(n_0)^2}{n_0} =$$

$$= \sum_{kji} \varepsilon_{kji}\, dn^k \wedge dn_j \wedge dn_i \left(- \frac{n_j^2}{n_0} - \frac{n_i^2}{n_0} - \frac{(n_0)^2}{n_0} - \frac{n_k^2}{n_0} \right) \to -\frac{1}{n_0}$$

$$ds^2 = (dn_i)^2 + \frac{1}{n_0^2}\left(n_e\, dn_e\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{n_i n_j}{n_0^2}}$$

~~det g_{ij}~~

$$n_i = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{n^2}{1-n^2} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$n_0 = \sqrt{1-n^2}$$

$$\boxed{\det g_{ij} = \frac{1}{1-n^2}} = \frac{1}{n_0^2}$$

$$\boxed{\sqrt{\det g_{ij}} = \frac{1}{n_0}}$$

VI

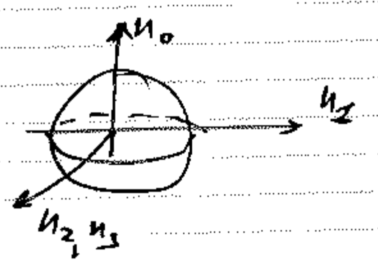
$$[d\omega] = \mathrm{tr}\left[\omega^{-1}d\omega \cdot \omega^{-1}d\omega \cdot \omega^{-1}d\omega\right] =$$

$$= -12 \; dy_1\, dy_2\, dy_3 \sqrt{\left|\frac{\partial u_\mu}{\partial y_i}\frac{\partial u_\mu}{\partial y_j}\right|}.$$

Задача. Рассмотрим группу $SU(2) = S^3$

$$\omega = u_\mu \sigma^\mu \qquad \sigma^\mu = (I, i\tau^a)$$

$$\sum_\mu (u_\mu)^2 = 1$$



Ввести инвариантную меру

$$[d\omega] = \left| \mathrm{tr}\left[(g^{-1}dg)^3\right]\right|.$$

Ввести Евклидову меру на сфере $dy^1 dy^2 dy^3 \sqrt{\det g_{ij}}$

Показать, что они пропорциональны друг другу

(Коэфф. пропорциональности = 12).

В общем случае для n- параметрической группы

$$d\omega = tr\left[\omega^{-1}d\omega \wedge \dots \wedge \omega^{-1}d\omega\right]$$

$$\wr$$

$$f(y)\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

Итак

$$\Delta_L(A)\int \prod_{x,a} \delta(\partial_\mu A_\mu^{(\omega)})\,[d\omega] = 1$$

Компенсирующий множитель.

Условие, фиксир. калибровку

Интеграл всей калибр группе по

$$\Delta_L(A^{\omega_0})\int \prod_{x,a} \delta\Big(\partial_\mu \underbrace{\big(A_\mu^{(\omega_0)}\big)^{(\omega)}}_{A_\mu^{\omega\omega_0}}\Big)\,\underset{[d\omega\omega_0]}{\overset{\shortparallel}{[d\omega]}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta_L(A^{\omega_0}) = \Delta_L(A)} \Rightarrow$$ Детерминант калибровочн инвариантен

В общем случае для n- параметрической группы.

$$d\omega = \mathrm{tr}\left[\omega^{-1}d\omega \wedge \dots \wedge \omega^{-1}d\omega\right]$$
$$\| $$
$$f(y)\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

<u>Итак</u>

$$\Delta_L(A) \int \prod_{x,a} \delta(\partial_\mu A_\mu^{(\omega)}) [d\omega] = 1$$

Компенсирующий множитель

Условие, фиксир. калибровку

Интеграл по всей калибр. группе

$$\Delta_L(A^{\omega_0}) \int \prod_{x,a} \delta\Big(\partial_\mu \underbrace{\big(A_\mu^{(\omega_0)}\big)^{(\omega)}}_{A_\mu^{\omega\omega_0}}\Big) \underset{[d\omega\omega_0]}{\underset{\|}{[d\omega]}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\Delta_L(A^{\omega_0}) = \Delta_L(A)}$ $\Rightarrow$ Детерминант калибровочно инвариантен

$$I = \int [dA_\mu^a]\,[d\omega]\;\delta(\partial_\mu A_\mu^{(\omega)})\;\det M\;\delta(\partial_i A_i)\;\Delta_L(A)\;e$$

$$\boxed{\Delta_c(A)\int \delta(\partial_k A_k^{\omega})\,d\omega = 1}$$

$$\boxed{\Delta_c(A)\Big|_{\partial_k A_k = 0} \quad -?}$$

Главный вклад – от точки $\omega = 1$

$\boxed{\omega = 1 + u}$ – Элемент Алгебры, $\boxed{u = -i\,t^a u^a}$

$$\omega^{-1} d\omega = (1 - u)\,du = du$$

$$[d\omega] = tr(\omega^{-1}d\omega \wedge \ldots \wedge \omega^{-1}d\omega) = tr(du \wedge du \wedge \ldots \wedge du)$$

$$u = u^a T^a$$

$$\shortparallel$$

$$[redacted]\; du^1\, du^2\, du^3\, du^4 \ldots du^N \times$$

$$\times\; \varepsilon^{abc\ldots e}\; tr(T^a T^b \ldots T^e)$$

↓ Несущественная константа

$$\boxed{[d\omega] = \prod_a du_a}$$

$$A_k^{\omega} = \omega A_k \omega^{-1} + \omega \partial_k \omega^{-1} =$$

$$= (1+u) A_k (1-u) - \partial_k u =$$

$$= [u, A_k] + A_k - \partial_k u$$

$$\partial_k A_k^{\omega} = -\Delta u - \cancel{[\partial_k A_k, u]} - [A_k, \partial_k u]$$

$$\partial_k A_k^{a,\omega} = -\Delta u - \frac{i f^{cab} A_k^a \partial_k u^b g (-i)^2}{+ \cancel{bc}}$$

$$\partial_k A_k^{a,\omega} = -\Delta u^a - f^{abc} A_k^b \partial_k u^c = -M^{ac} u^c$$

$$\Downarrow \qquad \text{"} (\det \hat{M})^{-1}$$

$$\Delta_c(A) \int du\, \delta(-\hat{M} u) = 1$$

$\partial_k A_k = 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta_c(A)\Big|_{\partial_k A_k = 1} = \det \hat{M}}$$

$$\boxed{\int dx_1 \dots dx_n\, \delta(\hat{A}\vec{x}) = (\det A)^{-1}}$$

$\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$

$d\vec{y} = \det A \cdot d\vec{x}$

Аналогично:

$$\boxed{\Delta_L(A)\Big|_{\partial_\mu A_\mu^a=0} = \det M_L}$$

$$\boxed{M_L^{ac} = -\Box\,\delta^{ac} - g f^{abc} A_\mu^b\,\partial_\mu}$$

Но: $\delta(\partial_k A_k)\det M = \delta(\partial_k A_k)\Delta_c(A) = \delta(\partial_k A_k)\,\Delta_c(A^\omega)$

$$\boxed{\text{Обозначим}\quad A^{\omega'} = A^\omega}$$

dA - Калибровочно/инвариантна.

$$dA^\omega = \omega^{-1}\cdot dA\,\omega \quad \Updownarrow$$

$$tr(\underbrace{dA\wedge dA\wedge dA\wedge\dots\wedge dA}_{N_c\text{ раз}}) \propto \prod_a dA^a$$

$$I = \int[dA]\underset{[d\omega^{-1}]}{\underset{\shortparallel}{[d\omega]}}\,\delta(\partial_\mu A_\mu)\,\Delta_c(A_\mu)\,\delta(\partial_i A_i^{(-\omega)})\,\Delta_L(\partial_\mu A_\mu)\,e^{iS[A]}$$

$[d\omega^{-1}] = tr(\omega d\omega^{-1}\wedge\dots\wedge\omega d\omega^{-1}) =$

$$= (-1)^N \, \mathrm{tr}\left(\omega^{-1} d\omega \wedge \dots \wedge \omega^{-1} d\omega \right)$$

$$\boxed{I = \int [dA] \; \delta(\partial_\mu A_\mu) \; \det(M_L) \; e^{iS[A]}}$$

Изначальная Идея

$$I = \int [dA] \; e^{iS} \longleftrightarrow$$

Запостулировали

Но: Плохо определена! Конфигурации A и A^ω дают одинаковый вклад!

$$\boxed{1 = \Delta_L(A) \int d\omega \; \delta(\partial_\mu A^\omega_\mu)}$$

→ Условие фиксации калибровки

Инт-л по калибр. группе

Детерминант ФП.

$$I = \int d\omega \; \underbrace{\int [dA] \; \delta(\partial_\mu A^\omega_\mu) \; \Delta_L(A) \; e^{iS}}_{\text{Не зависит от } \omega\,!} \Rightarrow \text{Поделим}$$

Последнее замечание из Славнова

$$\boxed{\det \hat{A} = \prod \lambda_a}$$

Нужно найти собств. векторы / собств. значения.

$\boxed{\text{Какие граничные условия нужно налагать на эти векторы?}}$

У нас изначально был

$$\underbrace{\int [dA]\, \delta(\partial_k A_k)}$$

Калибр условие выполняется при $\boxed{\begin{matrix} t = t_i \\ t = t_f \end{matrix} \quad t = \text{промеж.}}$

Мы сделали калибр. преобразование

Не должно трогать гран. условие

• $M_L^{ab} u^b = \lambda u^a$

$\boxed{\text{ф-ция калибр. преобр.}}$ должна исчезать при $t = t_i$ и $t = t_f$

$!\, u \mapsto 0$ при $t \mapsto t_i, t_f$

α - Калибровка

Введём условие

$$\Delta_L^{\beta}(A) \int \delta(\partial_\mu A_\mu^{a,\omega} - B^a)\, d\omega = 1 .$$

$$\Delta_{L,\alpha}^{(\beta)}(A)\Big|_{\partial_\mu A_\mu^{(a),\omega} = B} = \partial_\mu\left(-[u, A_\mu] + A_\mu - \partial_\mu u\right) - B =$$

$$= \cancel{\partial_\mu A_\mu - B}^{\,0} - [\partial_\mu u, A_\mu] - \partial_\mu \partial_\mu u -$$

$$- \cancel{[u, \partial_\mu A_\mu]}_{\to [u, B]}$$

$$\boxed{M^{ab} = \Box\delta^{ab} - \partial_\mu\left(g f^{acb} A_\mu^c \,\cdot\right)}$$

~~Функциона[illegible]зда~~

$\Downarrow$

$$I = \int [dA] \, \delta(\partial_\mu A_\mu^a - B^a) \det M \, e^{iS[A]}.$$

$\updownarrow$

Не зависит от B^a

$\Downarrow$

$$\int I \, dB \, e^{-\frac{i}{8\alpha}\int (B^a)^2 dx} = I \underbrace{\int [dB] \, e^{-\frac{i}{8\alpha}\int (B^a)^2 dx}}_{Const}.$$

$\Downarrow$

$$I = \int [dA][dB] \, \delta(\partial_\mu A_\mu^a - B^a) \, e^{-i/2\alpha \int (B^a)^2 dx} =$$

$$= \int [dA] \exp\left\{ iS - \frac{i}{2\alpha}\int (\partial_\mu A_\mu^a)^2 dx \right\}.$$

$$\boxed{S_\alpha = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial A^a)^2} \longleftarrow$$ Функционал в α-калибровке

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + \frac{\partial_\nu \partial_\mu A_\mu}{\alpha} = 0$$

$$\left(k_\rho^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu + \frac{k_\mu k_\nu}{\alpha}\right) A_\nu = 0$$

$$D = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha - 1)\right)$$

$$\left[k^2 \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}(1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \frac{1}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(\alpha - 1)\right)$$

$$\eta_{\mu\lambda} + \frac{1}{\alpha}(1-\alpha)\cancel{\frac{k_\mu k_\lambda}{k^2}} + \cancel{\frac{k_\mu k_\lambda}{k^2}(\alpha - 1)} - \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2}\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}$$

$$\cancel{\frac{1}{\alpha}} - \cancel{1} \qquad \text{ok} \qquad \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha}\right)$$

Алгебра Грассмана

Квантовый осциллятор. $\hat{p}, \hat{q}$ $[\hat{p}, \hat{q}] = -i$

$\psi(q)$ $\boxed{\begin{aligned} \hat{q}\psi &= q\psi(q) \\ \hat{p}\psi &= -i\frac{d}{dq}\psi(q) \end{aligned}}$

Попробуем построить аналогичную штуку для ферми-полей

Отличительная особенность ферми-поля

Принцип Паули - 2 ч-цы не могут быть в одном и том же состоянии. Пусть у нас есть система, $a_s^+(p) \mapsto$ рождает ч-цу в состоянии с импульсом p спином s

$$\boxed{\langle\psi|} \boxed{a_s^+(p)\, a_s^+(p)\,|0\rangle = 0} \quad \forall s, p$$

Такое естественным образом достигается если выполн. антикоммутац. соотношения (Принцип неразличимости ч-ц в квантовой механике)

$$\{p_i\, q_j\} = \delta_{ij}$$ — <u>Для системы ферми-частиц</u>

$$[p_i q_k, q_j] = p_i q_k q_j - q_j p_i q_k$$

$$-i\{p_i q_k, q_j\} = \cancel{\{p_i q_k\} q_j} - q_k \{p_i q_j\} + \cancel{\{q_k q_j\}} p_i - \cancel{q_j \{q_k p_i\}} + \cancel{q_i p_i q_k} - \cancel{q_j p_i q_k}$$

$$\parallel$$

$$+ i q_k \delta_{ij} = -q_k c \cdot \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{c = -i}$$

$$\boxed{\{p_i, q_j\} = -i\delta_{ij}}$$

$$[p_i\, q_j] = -i\delta_{ij} \qquad \{p_i\, q_j\} = -i\,[p_i\, q_j] = -1$$

$\psi(q) \leftarrow$ <u>Тоже</u>

$$\boxed{\hat{q}_i \psi(q) = q_i \psi(q)}$$

<u>Но</u>: $\hat{q}_i \hat{q}_j \psi(q) = -\hat{q}_j \hat{q}_i \psi(q) = q_i q_j \psi(q)$

Числа q_i и q_j должны антикоммутировать! $\Leftrightarrow$

Алгебра Грассмана $\{q_i, q_j\} = 0$

$\Psi(q_1) = \Psi_0 + \Psi_1 q_1$

Одна переменная

2 переменные $\Psi(q_1, q_2) = \Psi_0 + \Psi_1 q_1 + \Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_1 q_2.$

$\hat p_1 = -i\frac{\partial}{\partial q_1} \Rightarrow \boxed{\hat p\,\Psi(q_1) = -i\Psi_1}$

$\{\hat p, \hat q\} = -i\frac{\partial}{\partial q_1}\hat q_1 + \hat q_1\left(+i\frac{\partial}{\partial q_1}\right) = -i$

~~Нормировка состояния~~

$\cancel{\hat q_1 \Psi(q) = q_1 \Psi_0 = }$

~~Собств. состояние~~ $\cancel{q_1}$ → ~~Константы~~

$\cancel{\langle \Psi_{q}|\Psi_{q}\rangle = 1 = \int dq\, \Psi^*_{q_1}(q)\Psi_{q_2}(q) = \int dq_1 |\ |^2}$

$|\Psi\rangle := \int dq_1\, \Psi(q_1)|q_1\rangle$

$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int dq_1 \langle q_1|q_2\rangle dq_2\, \Psi^*(q_1)\Psi(q_2) =$

$\langle q_1|q_2\rangle \to \delta(q_1 - q_2)$

$= \int dq\, \Psi^*(q)\Psi(q)$

$\hat p\,\Psi_p(q) = p\,\Psi_p(q)$

$-i\frac{d}{dq}(\Psi_0 + \Psi_1 q) = p(\Psi_0 + \Psi_1 q)$

$\quad\;\; \parallel$

$\;\; -i\Psi_1$

$\Rightarrow \boxed{\Psi_1 = ip\Psi_0}$

$$\boxed{\Psi_p = \Psi_0(1 + ipq) = \Psi_0 e^{ipq}}$$

Нужно чтоб $\boxed{\hat{p} = -i\frac{d}{dq}}$ был эрмитовым

$$\int \Psi_1^*(q)\,\frac{d}{dq}\Psi_2^*\,dq = \int\left(-i\frac{d}{dq}\Psi_1\right)^*\Psi_2\,dq + \int dq\frac{d}{dq}\left(\Psi_1^*\Psi_2\right)$$

$$\Downarrow$$

Для эрмитовости нужно:

$$\int dq\,\frac{d}{dq}\Psi(q) = 0 \Rightarrow \int dq.\,\Psi_0 = 0$$

$$\int dq\,\Psi_1\cdot q = \Psi_1\int dq\cdot q = \Psi_1$$

Определение меры.

$$\boxed{\int dq_1 \dots dq\;\exp\left\{i\sum q_i A_{ij} q_j\right\}}$$

Задача. Доказать, что

$$\boxed{\int dq_1 \dots dq_n\;\exp\left\{+\sum_{ij} q_i A_{ij} q_j\right\} = \det A}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\det \hat M^{ab} = \int dc^a d\bar c^a(x) \exp\{\bar c^{(a)} \hat M^{ab} c^b\}}$$

$$\boxed{\int \prod dQ_i\, d\bar Q_i \exp\{i \sum \bar c_i M_{ij} c_j\} \propto \det M}$$

$$\boxed{dQ\, d\bar Q = (dQ_R + i\, dQ_I)(dQ_R - i\, dQ_I) =}$$

$$\boxed{= -2i\, dQ_R\, dQ_I}$$

$$\boxed{\int dq\, dq^+ = -2i \int dq_R\, dq_I}$$

$$\boxed{\int d\Psi\, d\Psi^+} \qquad \begin{aligned} \int dq \cdot q &= 1 \\ \int dq \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\int dc_i\, dc_i^+ \; \underline{\exp\{i\, c_i^+ M_{ij} c_j\}} = \qquad \propto \det M_{ij}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(i\, c_i^+ M_{ij} c_j\right)^n =$$

$$= \frac{1}{n!}(i)^n \underset{c_1}{c_1^+}\underset{c_2}{c_2^+}\underset{c_3}{c_3^+} \cdots c_n^+\, n!\, (-1)^{\#} M_{1n_1} M_{1n_2} \cdots (-1)^{\pi_{n_1 n_2 \ldots}}$$

Следовательно,

$$\det \hat{M} = \int d\bar{c}(x)\, dc(x)\ \exp\left\{ i \int \bar{c}^{a}(x)\, \hat{M}^{ab}\, c^{b}(x)\, dx \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I = \int [dA\, d\bar{c}\, dc]\ \exp\left\{ i S_A^{\alpha} + i \int \bar{c}(x)\, \hat{M}^{ab}\, c^{b}(x)\, dx \right\}}$$