Связи II рода. Простой пример

Пусть у нас после проведения процедуры исключения связей получилось

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &\simeq 0 \\ p_1 &\approx 0. \end{aligned}}$$

$\{p_1, q_1\} = -1 \;\Rightarrow\;$ Связи II рода.

Во-первых, мы не можем их накладывать на ВФ!

$$\begin{aligned} q_1 \Psi &= 0 \\ p_1 \Psi &= 0 \end{aligned} \;\Rightarrow\; [\hat p_1, \hat q_1]\Psi = -i\Psi = 0 \quad ?!$$

$\Downarrow$

Надо поступать по-другому.

Общий метод: Связи II рода нужно разрешать относительно набора координат q_α и сопряжённых им импульсов и подставлять в действие.

Проверим: В более общем случае

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &\approx 0 \\ q_1 &= f(q,p) \end{aligned}}$$

Не зависит от q_1, p_1

Не зависит от q_1

$$\cancel{A = \int (p_i \dot q_i - H(p,q)) - \lambda_1 p_1 - \lambda_2 (q_1 - f(q,p))}$$

$$\cancel{\dot p_1 = \{p_1, H\} + \lambda_2 \{p_1, q_1\}}$$

$$\dot q_1 = \{q_1, H\} + \lambda_1\{q_1, p_1\} + \lambda_2\{q_1, q_1 - f(p,q)\}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} + \lambda_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot q_1 - \left(f(p_\alpha, q_\alpha)\right)^{\cdot} = 0 = \frac{\partial H}{\partial p_1} + \lambda_1 - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}}$$

$$0 = \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} - \lambda_2 \qquad \lambda_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\dot q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \lambda_2\left(-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$\dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \lambda_2\left(-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$p_1 = 0 \qquad q_1 = f(p_\alpha, q_\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot q_\alpha = \left\{\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right\}\Bigg|_{\substack{q_1 = f(p_\alpha, q_\alpha)\\ p_1 = 0}} = \frac{\partial H_*}{\partial p_\alpha}$$

$$\dot p_\alpha = \left\{-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\}\Bigg|_{\substack{q_1 = f(p_\alpha, q_\alpha)\\ p_1 = 0}} = -\frac{\partial H_*}{\partial q_\alpha}$$

$$\boxed{H_* = H\Big|_{\substack{p_1 = 0\\ q_1 = f(q_\alpha, p_\alpha)}}}$$

Каноническое квантование поля Янга-Миллса

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{L}_A = \frac{1}{2g^2}\, tr\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \end{array}\right]$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = (\partial_\mu + A_\mu)\varphi$$

$$\mathcal{D}_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a + g f^{abc} A_\mu^b \varphi^c.$$

$$\begin{array}{l} A_\mu = -ig A_\mu^a t^a \\ F_{\mu\nu} = -ig\, F_{\mu\nu}^a t^a \end{array}$$

$G:\ tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ $\quad t^a$ - генераторы группы.

$t^{a+} = t^a \qquad [t^a t^b] = if^{abc} t^c$

$SU(2):\ \boxed{t^a = \frac{\tau^a}{2}}$.

$$F_{\mu\nu} = -ig\, t_a \partial_\mu A_\nu^a + ig\, t^a \partial_\nu A_\mu^a + (-ig)^2 \underbrace{[t^a, t^b]}_{if^{abc} t^c} A_\mu^a A_\nu^b$$

$$-if^{abc} \frac{1}{t_a}\ \ if^{abd} t_a$$

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a}$$

~~Трюк из книжки~~

$$\cancel{\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a\right) F_{\mu\nu}^a}$$

~~Независимые переменные.~~

~~Варьируя по $F_{\mu\nu}$:~~

$$\cancel{-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c\right) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}}$$

Делаем всё почти по-честному

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}(F^a_{0i})^2 - \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i)^2 - \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2$$

$$\cancel{\boxed{\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_0 A^a_0)}}}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_0 A^a_i)^2 + \partial_0 A^a_i(-\partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i) +$$
$$+ (-\partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i)^2 - \frac{1}{4} F^2_{ij}$$

$$\pi^a_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_0 A^a_0)} = 0 \quad \leftarrow \boxed{\text{Связь!}}$$

$$\pi^a_i = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_0 A^a_i)} = \partial_0 A^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i =$$
$$= F^a_{0i}$$

$$H = \int d\vec{x}\,\{\cancel{\pi^a_0 \dot{A}^a_0}_{\,0} + \pi^a_i \dot{A}^a_i - \mathcal{L}\} =$$

$$= \int d\vec{x}\,\{\pi^a_i(\dot{A}^a_i - \partial_i A^a_0 + g f^{abc} A^b_0 A^c_i) + \pi^a_i(\partial_i A^a_0 - g f^{abc} A^b_0 A^c_i) - \frac{1}{2}(\pi^a_i)^2 + \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2\}$$

$$\to (\pi^a_i)^2$$

$$-A^b_0 \partial_i \pi^b_i + A^b_0 g f^{bac} \pi^b_i A^c_i$$

$$\boxed{H = \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\pi^a_i)^2 + \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 - A^b_0(\partial_i \pi^b_i - g f^{bac} \pi^b_i A^c_i)\}}$$

$$D_i \pi^b_i$$

$$S = \int dt \left\{ \int d\vec{x} \left(\pi_0^a \dot{A}_0^a + \pi_i^a \dot{A}_i^a \right) - H(\pi, A) - \int u^a \pi_0^a \, d\lambda \right.$$

$$\boxed{\cancel{\pi_0^a A^3}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \{ \pi_0^a(\vec{x}), A_0^b(\vec{y}) \} &= -\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\, \delta_{ab} \\ \{ \pi_i^a(\vec{x}), A_j^b(\vec{y}) \} &= -\delta_{ij}\, \delta_{ab}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned}}$$

$$\dot{\pi}_0^a = \{ \pi_0^a(\vec{x}), H \} = + \boxed{\cancel{u^b}} \; \{ \pi_0^a(\vec{x}), \int d\vec{y}\, u(\vec{y})\, \pi^b(\vec{y}) \} \to 0$$

$$= \{ \pi_0^a(\vec{x}), \int d\vec{y} \{ -A_0^b (\partial_i \pi_i^b(\vec{y}) - g f \text{[redacted]}^{bcd} \pi_i^c A_i^d) \}$$

$$-\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\, \delta_{ab}$$

$$= \boxed{\partial_i \pi_i^a(\vec{x}) - g f^{abc} \pi_i^b A_i^c = \rho^a(\vec{x})}$$

Вторичная связь

$$\boxed{\{ \rho^a(\vec{x}), \pi_0^b(\vec{y}) \} = 0}$$

$$\dot{\rho}^a = \{ \rho^a(\vec{x}), H \}$$

$$= \int d\vec{y} \; \{ \text{[redacted]} \; \partial_i \pi_i^a(\vec{x}) - g f^{abc} \pi_i^b(\vec{x}) A_i^c(\vec{x}),$$

$$\frac{1}{2}\left(\pi_j^d(\vec{y})\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_k A_j^d(\vec{y})\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_j A_j^d(\vec{y})\right)^2 -$$

$$- \underbrace{\cancel{A_0^b(\vec{y})\, \rho^b(\vec{y})}}_{\text{Коммутирует}} \} =$$

$$= \int d\vec{y} \left\{ \underbrace{-\left(\partial_{iy} \left(+\tfrac{1}{2} \partial_{ky}\right) \delta_{jk}\, \delta_{ad} (+)\delta(\vec{x}-\vec{y})\right) \partial_k A_k^a(\vec{y})} \right.$$

$$\underbrace{+ \left[+\partial_{iy} \left(\tfrac{1}{2} \partial_{ky}\right) \delta_{ij}\, \delta_{ad} \left(+\delta(\vec{x}-\vec{y})\right) \right] \} \, \partial_k A_i^a(\vec{y})}$$

$$+ g f^{abc} A_i^c(\vec{x}) \, \tfrac{1}{2} \left(\partial_k^2 A_l^b(\vec{y})\right) \cdot 2 \cdot \cancel{\partial_{y}} \left(+\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right) \cancel{\delta_{ij}\delta_{bd}}$$

$$+ g f^{abc} A_i^c(\vec{x}) \left(+\tfrac{1}{2}\right) \left(2\partial_i\partial_k A_k^b(\vec{y})\right) \cdot \cancel{\partial_y} \left(+\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right) \cancel{\delta_{ij}\delta_{bd}}$$

$$- g f^{abc} \pi_i^b(\vec{x}) \, \pi_l^c(\vec{y}) \, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \cancel{\delta_{ij}\delta_{cd}} \Big\}$$

$$= \int d\vec{y} \, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \Big\{ \cancel{-\Delta \partial_k A_k^a(\vec{y})} + \cancel{\partial_i \Delta A_i^a(\vec{y})}$$

$$\vec{x} = \vec{y}$$

$$\cancel{- g f^{abc} \partial_k A_i^c(\vec{x}) \, \partial_k^2 A_i^b(\vec{y})} + \left(g f^{abc} \partial_i A_i^c(\vec{x}) \, \cancel{\partial_i} \partial_k A_k^b(\vec{y})\right)$$

$$+ g f^{abc} \pi_i^b(\vec{x}) \, \pi_i^c(\vec{y}) \Big\}$$

$$0 \quad \boxed{\text{из-за AS } f^{abc}} \quad = 0 \quad \text{ok}$$

Процедура закончилась

Задача Показать, что

$$\boxed{\{\varsigma^a(\vec{x}), \varsigma^b(\vec{y})\} = g\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \, f^{abc} \, \varsigma^c(\vec{x})}$$

Решение задачи

$$\{\varsigma^a(\vec{x}), \varsigma^b(\vec{y})\} =$$

$$= \{ \partial_i \pi_i^a(\vec{x}) - g f^{adc} \pi_i^d(\vec{x}) A_i^c(\vec{x}),$$

$$\partial_j \pi_j^b(\vec{y}) - g f^{bef} \pi_j^e(\vec{y}) A_j^f(\vec{y}) \} =$$

$$= \partial_{ix}\left(+g f^{bed} \pi_l^e(\vec{y}) \, \cancel{\delta_{ij}} \, \cancel{\delta_{af}} (+\delta(\vec{x}-\vec{y}))\right) -$$

$$+ g f^{adc} A_i^c(\vec{x}) \left(-g f^{bed} \, \pi_l^e(\vec{y})\right) \cancel{\delta_{ij}} \cancel{\delta^{cf}} (+\delta(\vec{x}-\vec{y}))$$

$$+ g f^{abd} \pi_i^d(\vec{x}) \, \cancel{\partial_{ix}} \cancel{\delta_{ij}} \cancel{\delta_{de}} \, \delta(\vec{x}-\vec{y}) -$$

$$+ g f^{aed} \pi_i^e(\vec{x}) \left(+g f^{bdc} A_l^c(\vec{y})\right) \delta_{ij} \cancel{\delta_{de}} \, \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= \mp g f^{aebe} \pi_i^e(\vec{y})\, \partial_{iy} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - g f^{abd} \pi_i^d(\vec{x})\, \partial_{ix} \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$+ g^2 f^{abc} f^{bcd} A_i^c(x) \pi_i^d(\vec{y})\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) -$$

$$- g^2 f^{ade} f^{bde} \pi_i^d(\vec{x}) A_i^e(\vec{y})\, \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$$

$$[[t^a, t^b] t^c] + [[t^b, t^c] t^a] + [[t^c, t^a] t^b] = 0$$

$$\cancel{t^a t^b t^c} - \cancel{t^b t^a t^c} - \cancel{t^c t^a t^b} + \cancel{t^c t^b t^a}$$

$$+ \cancel{t^b t^c t^a} - \cancel{t^c t^b t^a} - \cancel{t^a t^b t^c} + \cancel{t^a t^c t^b}$$

$$+ \cancel{t^c t^a t^b} - \cancel{t^a t^c t^b} - \cancel{t^b t^c t^a} + \cancel{t^b t^a t^c} = 0 \quad \text{ok}$$

$$f^{abd} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0$$

$$- f^{abd} f^{ecd} \qquad\qquad f^{acd} f^{ebd}$$

$$- f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce} = - f^{abe} f^{ede}$$

$$+ f^{acd} f^{bed} \quad - f^{aed} f^{bcd}$$

$$\int \{ \xi^a(\vec{x}), \xi^b(\vec{y}) \} f(\vec{x}) g(\vec{y})\, d\vec{x}\, d\vec{y} =$$

$$= \int d^3y\, g f^{abe}\, \partial_i \pi_i^e(\vec{y}) f(\vec{y}) g(\vec{y}) + \cancel{\int d^3y\, g f^{abe} \pi_i^e(\vec{y}) f(\vec{y}) \partial_i g(\vec{y})}$$

$$+ \cancel{\boxed{\int d^3y\, g\, f^{abd}\, \partial_i \pi_i^d(\vec{y})\, f(\vec{y}) g(\vec{y})}} + \cancel{\int d^3y\, g f^{abd} \pi_i^d(\vec{y})\, \partial_i f(\vec{y})\, g(\vec{y})}$$

ok

$$+ \int d^3\vec{y}\, f(\vec{y}) g(\vec{y})\, f^{abe} f^{cde}\, \pi_i^d(\vec{y}) A_i^c(\vec{y})$$

$$= \int d^3\vec{y}\, \{ g f^{abl} \} f(\vec{y}) g(\vec{y}) \times$$

$$\times \{ \partial_i \pi_i^l(\vec{y}) + f^{ldc} \pi_i^d A_i^c \}$$

$$\underline{\Psi}$$

$$\boxed{\{\xi^a(\vec x), \xi^b(\vec y)\} = g f^{abc}\, \xi^c(\vec y)\, \delta(\vec x-\vec y)}$$

<u>Итак</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &\{\pi_0^a, H\} = 0 \\ &\{\xi^a, H\} = 0 \\ &\{\pi_0^a, \xi^a\} = 0 \\ &\{\xi^a(\vec x), \xi^b(\vec y)\} = g f^{abc}\, \xi^c(\vec x)\, \delta(\vec x-\vec y) \end{aligned}}$$

<u>Задача</u> <u>(Конци Грибова)</u> Показать, что условия

$$\boxed{\begin{aligned} &A_0 = 0 \\ &\partial_i A_i = 0 \end{aligned}}$$

Не фиксируют однозначно вакуумное поле YM. в классе статических конфигураций.

Предъявить явно 2 поля, которые связаны калибровочным преобразованием Ω и удовлетворяют вакуумным ур-ниям YM.

<u>Итак</u> <u>2 связи</u> $\boxed{\begin{array}{c} \pi_0^a \\ \hline \xi^a \end{array}}$ ← Входит тривиально.

I

Мы должны вводить условия, фиксирующие калибровку χ_a : $\{\chi_a, \chi_b\} = 0$

$\{\chi_a, \varphi_b\}$ не вырождена.

π_0^a $\boxed{\chi_0^a = A_0^a}$

$$S = \int dx \, \{ \cancel{\pi_0^a \dot A_0^a}^{\,0} + \pi_i^a \dot A_i^a - \frac{1}{2}(\pi_i^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 + A_0^b \xi^b - u_0^a \pi_0^a - u^a \xi^a \}.$$

VI

<u>Входит комбинация</u> $(A_0^b \mp u^b)$

Заметим, что то, что произошло — <u>Переливание из пустого в порожнее.</u>

A_0^a с самого начала был множителем Лагранжа.

Мы могли с самого начала не вводить π_0^a, а

просто обращаться с ним как с множителем Лагранжа.

<u>Но нет!</u> Мы ввели A_0^a, π_0^a, $\chi_0^a = A_0^a$ и теперь должны

занулить $\left| \begin{array}{l} \pi_0^a = 0 \\ A_0^a = 0 \end{array} \right|$ в действии.

Далее u_0^a будем обозначать A_0^a

$$\boxed{S = \int dx \left\{ \pi_i^a \dot{A}_i^a - \frac{1}{2}(\pi_i^a)^2 - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 + A_0^a \varphi^a \right\}.}$$

$$\chi^a = \partial_i A_i^a$$

$$\{\chi^a, \chi^b\} = 0$$

$$\{\chi^a(\vec{x}), \varphi^b(\vec{y})\} = \{\partial_{jx} A_j^a(\vec{x}),\ \partial_{iy}\pi_i^b(\vec{y}) - g f^{bcd}\pi_i^c(\vec{y}) A_i^d(\vec{y})\} =$$

$$= \partial_{ix}\partial_{iy}\delta^{ab}\cancel{\delta_{ij}}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) -$$

$$- g f^{bad} A_i^d(\vec{y})\,\partial_{ix}\cancel{\delta^{ac}}\cancel{\delta_{ij}}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) =$$

$$= \{-\Delta_y \delta^{ab} - g f^{abd} A_i^d \partial_{iy}\}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\boxed{\hat{M}^{ab} = \Delta\delta^{ab} + g f^{abd} A_i^d \partial_{iy}}$$ Если этот опер-р не вырожден, то

$$\boxed{\det\{\chi^a(\vec{x}), \varphi^b(\vec{y})\} \neq 0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$\nexists$ нулевые вектора $\quad \int d\vec{y}\,\{\chi^a(\vec{x}), \varphi^b(\vec{y})\}\,f^b(\vec{y}) = [-\Delta_x\delta^{ab} + g f^{abd} A_i^d]\,f^b = 0$

Если у этого ур-ния есть только тривиальные решения $\boxed{f^a = 0,}$

то всё нормально.

По теории возмущений: $\Delta f^a = 0 \Rightarrow f^a = 0$

$$f = 0 + g f^{(1)}$$

$$-g\Delta f^{(1)} + \cancel{g f^{abd} A_i^d f^{(1)b}} = 0 \Rightarrow f^{(1)} = 0$$

Задача Вне теории возмущений: Найти f
Какая связь между 2-мя пунктами задачи?

$$I = \int \prod_{\alpha,t} \frac{d\lambda_\alpha(t)}{2\pi} \left(\prod_{\alpha,t} \frac{dp_\alpha(t)\, dq_\alpha(t)}{2\pi} \right) \det |\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}| \times$$

$$\times\, \delta(\chi_\alpha) \times \exp\{ \underbrace{iS}_{i\int (p_\alpha \dot q_\alpha - H(p,q) - \lambda_\alpha \varphi^\alpha) dt} \}.$$

$$I = \int \left(\prod_{a,t,\vec x} \frac{dA_0^a}{2\pi} \right) \left(\prod_{a,t} \frac{d\pi_i^a\, dA_i^a}{2\pi} \right) \det \hat M^{ab} \times$$

Гауссов Инт-л

$$\times\, \delta(\partial_i A_i^a) \exp\left(i \int \left(\pi_i^a \dot A_i^a - \frac{(\pi_i^a)^2}{2} - \frac{(F_{ij}^a)^2}{4} + A_0^a D_i \pi_i^a \right) \right)$$

$$I = \int [dA_\mu^a]\; \delta(\partial_i A_i^a) \times \cancel{\boxed{\exp\{i\int(\dots)\}}}$$

$$\underbrace{\exp\{ \tfrac{1}{2} \underbrace{(\dot A_i^a - D_i A_0^a)^2}_{F_{0i}^2} - \frac{(F_{ij}^a)^2}{4} }_{iS} \} \det \hat M^{ab}$$

$$I = \int [dA_\mu^a] \; \delta(\partial_i A_i^a) \det \hat{M}^{ab} \; e^{iS[A]}$$