Пример системы со связью I рода

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - y\right)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &\mapsto x + \alpha(t) \\ y &\mapsto y + \dot\alpha(t) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y}: &\quad \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{\delta}{\delta x}: &\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - y\right) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Уравнения не независимы.

$$\begin{cases} (i) \quad x(t) & \text{– Чистая калибровка} \\ (ii) \quad y = \dfrac{dx}{dt} & \text{– Определяется из связи.} \end{cases} \Rightarrow$$

Нет динамических степеней свободы.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{dx}{dt} - y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = p_x + y$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = 0 \quad \Rightarrow$$ Первичная связь $\boxed{\varphi_1 = p_y}$

$$H = p_x \dot x + \underbrace{\cancel{p_y \dot y}}_{\simeq 0} - \frac{1}{2}p_x^2 = \frac{p_x^2}{2} + p_x y - \cancel{\frac{1}{2}p_x^2}$$

$$\boxed{H = \frac{p_x^2}{2} + p_x \cdot y}$$

$$S = \int dt \left[p_x \cdot \dot x + p_y \cdot \dot y - H(\vec p, \vec q) - u \overset{p_y}{\overset{\parallel}{\varphi_1}} \right]$$

$$\dot\varphi_1 = \{\varphi_1, H\} + u\underbrace{\cancel{\{\varphi_1, \varphi_1\}}}_{0} = \{p_y, \cancel{\frac{p_x^2}{2}} + p_x \cdot y\} = -p_x = \varphi_2$$

$$\boxed{\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}} \qquad \boxed{\varphi_2 = -p_x}$$ Вторичная связь.

$$\dot\varphi_2 = \{\varphi_2, H\} + u\{\varphi_2, \varphi_1\} = \underbrace{\cancel{\{-p_x, \frac{p_x^2}{2} + p_x \cdot y\}}}_{0} + u\underbrace{\cancel{\{-p_x, p_y\}}}_{0} =$$

$$0 = 0$$

$$\Downarrow$$

Уравнение не определилось

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_1 &= p_y \\ \varphi_2 &= -p_x\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\{\varphi_1, \varphi_2\} &= 0 \\ \{\varphi_1, H\} &= 0 \\ \{\varphi_2, H\} &= 0\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 x(t) &= \varepsilon_2(t)\{\varphi_2, x\} = -\varepsilon_2(t) \\
\delta_2 y(t) &= 0 \\
\delta_1 x(t) &= 0 \\
\delta_1 y(t) &= -\varepsilon_1(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_1 p_x &= 0 \\ \delta_2 p_x &= 0\end{aligned}} \qquad \boxed{\delta_1 p_y = \delta_2 p_y = 0.}$$

Вроде как другие преобразования?

⇓

Наши Гамильтоновы ур-ния ~~обладают~~ (могут обладать) более широкой симметрией.

$$\dot p_x = \{p_x, H\} + u\{p_x, \underset{p_y}{\varphi_1}\} = 0$$

$$\dot p_y = \cancel{\{p_y, H\}}^{-p_x} + u\cancel{\{p_y, p_y\}}^{0} = -p_x = 0.$$

$\underline{p_y = 0}$ ⇒ Первичная связь.

$$\dot x = \cancel{\{x, H\}}_{p_x + y} + u\cancel{\{x, p_y\}}_{0} = p_x + y \Rightarrow \quad \underline{p_x = \dot x - y} \Rightarrow \underline{\dot x = y}$$

$$\dot y = \cancel{\{y, H\}}_{0} + u\{y, p_y\} = u(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot y = u(t)}$$

⇓

Те же самые ур-ния.

Калибровочная симметрия закодирована в произвольной $u(t)$

$u(t)$ — произвольные.

⇓

$$\dot g = \{g, H\} + u\{g, \varphi\}$$

$$\boxed{u \mapsto u + \delta u}$$

$$\delta g(t+\delta t) = g(t+\delta t, u) - g(t, u) =$$

$$= \delta t\, \dot g(t, u)$$

$$\delta g(t+\delta t) = \delta t\, \delta \dot g(t, u) = \delta u\, \delta t \{g, \varphi\}$$

$$\boxed{u \mapsto u + \delta u}$$

$$\begin{cases} \delta y = \int_{t_0}^{t} \delta u(t)\, dt = \delta U \approx \delta u(t_0)\,\Delta t \\ \delta \dot{x} = \delta y \Rightarrow \delta x = \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, \delta u(t) \approx \frac{(\Delta t)^2}{2}\, \delta u(t_0) \end{cases}$$

$$\boxed{\delta y = \frac{d}{d\Delta t}\, \delta x}$$

Обобщение: Прибовляем

$$\boxed{H_E = H + \overset{v_1}{\underset{\shortparallel}{u_1}} \varphi_1 + \overset{v_2}{\underset{\shortparallel}{u_2}} \varphi_2} \to \text{Обобщённый гамильтониан}$$

Расширилась калибровочная группа!

Изменились ур-ния движения — Внимание!

$$\boxed{\begin{matrix} p_x = 0 \\ p_y = 0 \end{matrix}} \qquad \begin{bmatrix} 0 \leftarrow \dot{p}_x = \dot{x} - y - v_2 \\ \dot{y} = v_1(t) \end{bmatrix}$$

Калибровка $v_2 = 0$ соответствует изначальной системе.

Получаем обобщённый набор движений одно из которых было движением изначальной системы.

Но: Дополнительная калибровочная инвариантность

$$\boxed{\begin{matrix} x \mapsto x + \alpha(t) \\ y \mapsto y + \beta(t) \end{matrix}}$$

Давайте квантовать по Славнову

$$S = \int dt \left(p_x \cdot \dot{x} + p_y \cdot \dot{y} - H(\vec{p}, \vec{q}) - v_1 \varphi_1 - v_2 \varphi_2 \right).$$

$$\boxed{\{\varphi_1, \varphi_2\} = 0} \qquad \boxed{\{\varphi_1, H\} = 0} \quad \boxed{\{p_y, H\} = \varphi_2} \qquad \boxed{\{\varphi_2, H\} = 0}$$

$$\left(\begin{matrix} \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = C_{\alpha\beta\gamma}(p,q)\, \varphi_\gamma \\ \{H, \varphi_\alpha\} = C_{\alpha\beta}(p,q)\, \varphi_\beta \end{matrix} \right)$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} p_x, x \\ p_y, y \end{pmatrix} \qquad \Gamma^* = (\varnothing) \quad \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(2-2)} \text{ степеней свободы}$$

Рассмотрим 2 дополнительных условия

(a) $\chi_1 \equiv y$
(b) $\chi_2 = x$

1) $\det\left(\{\varphi^\alpha, \chi^\beta\}\right) = \det\begin{pmatrix}\{p_y, y\} & \{p_y, x\}\\ \{p_x, y\} & \{p_x, x\}\end{pmatrix} =$

$$= \det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \neq 0$$

2) $\boxed{\{\chi^\alpha, \chi^\beta\} = 0}$

$\Rightarrow$ Выбрали условия

$\Gamma^*: \begin{array}{l}\chi^\alpha = 0\\ \varphi^\alpha = 0\end{array} \Bigg| \Rightarrow$ Искомое подпространство

Мы можем канонически преобразовать координаты

к $(\chi_\alpha \mid q^*) \mapsto$ Уже всё преобразовано

$\chi_\alpha \updownarrow p_\chi^\alpha$, $\quad q^* = \{\varnothing\}$

$\det\left(\dfrac{\partial\varphi^\alpha}{\partial p^\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow$ Ур-ния связей можно решить относительно p^α.

$$\boxed{h^*(\cancel{p^*, q^*}) = h(p,q)\Big|_{\substack{p = p(p_*, q_*)\\ \chi = 0}}}$$

Ур-ния движения для систем Γ и Γ^* совпадают

$\downarrow$

было показано

$$\begin{cases}\dot{q}^* = + \dfrac{\partial h^*}{\partial p^*} = \dfrac{\partial h^*}{\partial \chi}\dfrac{\partial \chi}{\partial p^*} + \dfrac{\partial h^*}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial p^*} + \dfrac{\partial h^*}{\partial p^*}\\ \dot{p}^* = - \dfrac{\partial h^*}{\partial q^*} = -\dfrac{\partial h^*}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial p^*} + \dfrac{\partial h^*}{\partial p^*} =\end{cases}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial p^*}\Big|_{\substack{p=p(p_*,q_*)\\ \chi=0}} + v_m \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_*}\Big|_{p = p(p_*, q_*)} +$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial p}\Big|_{p=p(\dots)} + v_m \frac{\partial \varphi_a}{\partial p}\Big| \cdot \frac{\partial p}{\partial p_*}$$

Эквивалентность ур-й движения

$$\Gamma: \begin{cases} \varphi_a = 0 \\ \chi_a = 0 \\ \dot p_a = \dfrac{\partial h}{\partial \chi_a} + v^b \dfrac{\partial \varphi_b}{\partial \chi_a} \\ \dot\chi_a = -\dfrac{\partial h}{\partial p_a} - v^b \dfrac{\partial \varphi_b}{\partial p_a} = 0 \Rightarrow \boxed{v^b \dfrac{\partial \varphi_b}{\partial p_a} = -\dfrac{\partial h}{\partial p_a}} \\ \dot p^* = \dfrac{\partial h}{\partial q^*} + v^b \dfrac{\partial \varphi_b}{\partial q^*} \end{cases}$$

Определение v^b

$$\dot q^* = -\frac{\partial h}{\partial p^*} - v^b \frac{\partial \varphi_b}{\partial p^*} = \boxed{\cancel{-\frac{\partial h}{\partial p_*}}}$$

Сюда подставим определение v_b.

$$\Gamma^* \left\{ \dot p^* = \frac{\partial h^*}{\partial q^*} = \frac{\partial h^*}{\partial q^*} + \frac{\partial h^*}{\partial p_a} \cdot \frac{\partial p^a}{\partial q^*} = \frac{\partial h^*}{\partial q^*} - v^b \frac{\partial \varphi_b}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial q^*} = \right.$$

$$p = p(p_*, q_*) \leftrightarrow \varphi(p, q) = 0 \qquad = \frac{\partial h^*}{\partial q^*} + v^b \frac{\partial \varphi^b}{\partial q^*}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q_*} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_*} = 0} \leftrightarrow \varphi = 0$$

Сюда подставим определение $p(p_*, q_*)$.

$$\boxed{\delta \dot q^* = 0 = -v^b \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial q_*} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial q^*} \right)}$$

$$\boxed{\dot\chi_a = 0}$$

Задача Квантовая Космология

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2N^2 & 0 \\ 0 & -a^2\delta_{ij} \end{pmatrix}}$$

Рассмотрим замкнутую пространственно-однородную Вселенную.

Замкнутая Вселенная.

$$S_a = \cancel{\int} \int d\eta \left(-\frac{\dot{a}^2}{2N} + N\left(\frac{a^2}{2} - \Lambda a^4\right)\right)$$

где

- η - конформное время
- N - ф-ция временного сдвига (Lapse function)
- Λ - космологическая постоянная

а) Построить Гамильтонов формализм.

Найти связи I рода и калибровочную симметрию

GR: $t \mapsto t' = t'(t)$

$$\boxed{\begin{aligned} N'(t') &= \frac{dt}{dt'} N(t) \\ a'(t') &= a(t) \end{aligned}}$$

б) ~~[illegible]~~ Проквантовать в представлении Шредингера, наложив связи на волновую ф-цию.

Показать что выполнено ур-ние Уилера - Де Витта

$$H \Psi(a) = 0$$

где H - гамильтониан, а $\Psi(a)$ - ВФ. Вселенной

в) Вписать ф-нальный инт-л.

г)* Найти квазиклассические решения ур-я Уилера - Де Витта. Показать, что эволюция Вселенной происходит согласно ур-ю Фридмана

$$I = \int \frac{dp_* \, dq_*}{2\pi} \exp\left\{ i \left(\underline{p_* \dot{q}_*} - \underline{h(p_*, q_*)} \right) \right\} = 1 =$$

$$\cancel{\boxed{= \int \prod_t \frac{d\lambda}{2\pi} \exp\left\{ -i \int \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right.}}$$

$$\int \prod_t \frac{d\lambda^\alpha(t)}{2\pi \Delta t} \exp\left\{ -i \int \lambda^\alpha \varphi_\alpha \, dt \right\} = \delta(\varphi_1)\, \delta(\varphi_2)$$

$$= \int \prod_t \left(\frac{d\lambda_1(t)}{2\pi \Delta t} \right) \left(\frac{d\lambda_2(t)}{2\pi \Delta t} \right) \exp\left\{ -i \int \lambda_1 p_y \, dt - i \int \lambda_2 p_x \, dt \right\} =$$

$$I = \int \prod_t \frac{dp_* \, dq_*}{2\pi} \int \prod_{t,\alpha} \frac{d\chi_\alpha \, dp_\alpha}{2\pi} \; \delta(\chi_\alpha)\, \delta(\varphi_\alpha) \; \det\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\alpha} \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ i \int \left(p_* \dot{q}_* - h(p_*, q_*) \right) \right\} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \int \prod_t \frac{dp_* \, dq_*}{2\pi} \prod_{t,\alpha} \frac{d\chi_\alpha \, dp_\alpha}{2\pi} \; \delta(\chi_\alpha) \det\left| \{ \chi_\alpha, \varphi_\beta \} \right| \times \\ &\times \prod_{t,\alpha} \frac{d\lambda_\alpha}{2\pi} \exp\left\{ i \int \left(p_* \dot{q}_* - h(p_*, q_*) - \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right) \right\}. \end{aligned}}$$

$$\cancel{dp_\alpha \, dq_\alpha = \left| \det \begin{matrix} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_\beta} & \frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta} \\ \frac{\partial q_\alpha}{\partial p'_\beta} & \frac{\partial q_\alpha}{\partial q'^\beta} \end{matrix} \right|} \qquad \cancel{dp_\alpha \, dq_\alpha = \prod_\alpha \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial p'_\beta} \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma} \right) dp_\beta \wedge dq_\gamma}$$

$$\left[\begin{aligned} I &= \int \prod_t \frac{dp \, dq}{2\pi} \prod_{t,\alpha} \frac{d\lambda_\alpha}{2\pi} \; \delta(\chi_\alpha) \det\left| \{ \chi_\alpha, \varphi_\beta \} \right| \times \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int \left(p\dot{q} - h(p,q) - \lambda_\alpha \varphi_\alpha \right) \right\}. = \\ &= \int \prod_t \frac{dp_x \, dx}{2\pi} \frac{dp_y \, dy}{2\pi} \prod_t \frac{d\lambda_1 \, d\lambda_2}{2\pi} \; \delta(x)\, \delta(y) \times \\ &\quad \times \exp\left\{ i \int \left(\dot{x} p_x + \dot{y} p_y - h(p,q) - \lambda_x \cdot p_x - \lambda_y \cdot p_y \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

ok

Связи II рода

Задача 1 $$S = \int dt \left(\frac{(\dot{\vec{x}})^2}{2} + \lambda(\vec{x}^2 - 1)\right)$$

Частица на сфере.

а) Выписать Лагранжевы и гамильтоновы ур-я движения

б) Проквантовать канонически

Задача 2 Проквантовать канонически поле Дирака

---

① Простой пример
$$\boxed{\begin{matrix} q_1 \simeq 0 \\ p_1 \simeq 0 \end{matrix}}$$

$\{q_1, p_1\} \neq 0 \Rightarrow$ Связи II рода

Не можем налагать в качестве доп. условий на ВФ!

$$\left.\begin{matrix} q_1\psi = 0 \\ p_1\psi = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow [q_1, p_1]\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi = 0} \; ?!$$

q_1, p_1 не представляют интереса $\Rightarrow$ Эта степень свободы не имеет никакого значения

$\boxed{\text{Нужно её отбросить}}$

$$\{f, g\} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right)$$

Кроме того, $\boxed{q_1 = 0 \,\big|\, p_1 = 0}$

$$\boxed{\begin{matrix} p_1 \simeq 0 \\ q_1 \simeq f(q, p) \end{matrix}}$$

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big|_{p_1 = 0,\ q_1 = 0} \quad i \geq 2$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} + \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}}$$

$\boxed{\text{Можно сначала в действие подставить } q_1 = p_1 = 0 \text{ а потом получать ур-е движения}}$

Теперь: $\boxed{\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ q_1 &= f(q, p) \end{aligned}}$

$$\dot p_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} - \lambda_2 \Longrightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\partial H}{\partial q_1}}$$

$$\dot q_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} - \lambda_1 \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1}}$$

$$\dot p_r = \frac{\partial H}{\partial q_r} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_1}}_{\lambda_2}\frac{\partial q_1}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_r} = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial q_r} \mapsto \boxed{\text{Те же самые ур-ния!}}$$

∃ степени свободы, которые жёстко зафиксированы

Общий случай $\boxed{\varphi_j \approx 0}$ | Составляем лин. комбинации, выделяем как можно больше связей I рода.

$$\det\left(\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\}\right) \leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{0-вые собств. знач.} \\ \text{Ненулевые собств. знач.} \end{array}}$$

Выделяем лин. п/пространство, для которого $\boxed{\{\varphi'_\alpha, \varphi'_\beta\} = 0}$

Для остальных $\boxed{\det\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} \neq 0}$ → AS матрица. $\boxed{N = 2K}$

⇓

~~Можно осуществить сделать канонические преобр.~~, так, что

Рассмотрим ф-ции от связей

Можно матрицу привести к каноническому виду

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

⇓

Делаем каноническое преобразование к $\boxed{\begin{array}{l} \varphi_1 \ldots \varphi_K \\ \varphi_{K+1} \ldots \varphi_{2K} \end{array}}$

Теория YM как система со связями I рода

$$\cancel{\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} tr(\partial_\mu A_\nu)}$$

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$$A_\mu = -ig A_\mu^a t^a \qquad [t_a, t_b] = f^{abc} t_c$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + ig f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$$F_{\mu\nu} = -ig F^a_{\mu\nu} t^a$$

$$\boxed{A_\mu \mapsto \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}}$$

$$tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} tr(F_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu])) -$$

$$- \frac{1}{8} tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{YM}}{\delta F^a_{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} tr(F_{\mu\nu} t^a) + \frac{1}{4} tr(t^a(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]))$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = 0 \Rightarrow -D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \mapsto ok$$

Трёхмерные обозначения

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= F_{k0} \\ H_k &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{kij}F_{ij} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} = {}& \frac{1}{4}\,tr\Big\{-2F_{0k}\left(\partial_0 A_k - \partial_k A_0 + [A_0, A_k]\right) + \\
&+ F_{ij}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]\right) + \\
&+ \cancel{\tfrac{1}{4}}\, F_{0k}F_{0k} - \frac{1}{2}F_{ij}F_{ij}\Big\} = \\
= {}& \frac{1}{4}\,tr\Big\{-2\,\mathcal{E}_k\left(\partial_0 A_k - \partial_k A_0 + [A_0, A_k]\right) \\
&+ \varepsilon_{ijk}H_k\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]\right) + \\
&+ (\mathcal{E}_k)^2 - \frac{1}{2}(H_i)^2\Big\} = \\
= {}& -\frac{1}{2}\,tr\left(\mathcal{E}_k\,\partial_0 A_k\right) - \frac{1}{2}\,tr\left(\partial_k \mathcal{E}_k A_0 + \cancel{\mathcal{E}_k A_0 A_k}\,\mathcal{E}_k - \cancel{A_0 \mathcal{E}_k A_k}\right) \\
& A_0\,[A_k \mathcal{E}_k] \\
&+ \frac{1}{2}\,tr\left[\left(\varepsilon_{ijk}H_k\right)\left(\partial_i A_j + A_i A_j\right)\right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\,tr\left(A_0\left(\partial_k \mathcal{E}_k - g[A_k \mathcal{E}_k]\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,tr\left(\mathcal{E}_k\,\partial_0 A_k + A_0\left(\partial_k \mathcal{E}_k - g[A_k \mathcal{E}_k]\right)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{E}_k^2$$

$\boxed{F_{ik} \text{ выразим через } A_i}$

$$F_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k + g[A_i, A_k]$$

$$\boxed{\mathcal{L} = E_k^a\,\partial_0 A_k^a - h(E_k, A_k] + A_0^a C_a.}$$

(i) A_0 - Множитель Лагранжа

(ii) E_k^a - импульсы

A_k^a - Координаты

(iii) Калибр. симметрия $\Rightarrow$ Связи I рода

$$\{ E^a_k(x), A^b_i(y) \} = \delta_{ki}\, \delta_{ab}\, \delta(x-y)$$

$$\Downarrow$$

$$[C^a(x) C^b(y)] = [\partial_k E^a_{k\,x} - g t^{ade} A^d_k E^e_x ,$$
$$\partial_k E^b_{k\,y} - g t^{brf} A^r_{e\,y} E^f_{e\,y}] =$$

$$= \partial_{k\,x} \left(+ g f^{baf} \delta(x-y) \cancel{\delta^{ra}} \cancel{\delta_{ek}} E^f_{k\,y} \right) \longmapsto 0$$
$$- \partial_{k\,y} \left(g f^{ade} \delta_{bd} \delta_{\ell e} \delta(y-x) E^\ell_x \right)$$

$$\partial_{x_k} \delta(x-y) \qquad \int \partial_x \delta(x-y) f(x)\, dx = $$
$$= - \int \delta(x-y)\, \partial_x f(x) = - f'(y)$$

$$- \partial_k E_{k\,y} \quad \delta(x-y)$$
$$+ \partial_k E_{k\,y} \quad \delta(x-y)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[C^a, C^b] = g f^{abc} C^c\, \delta(x-y)}$$

$$\boxed{\left[\int d^3x \left[(E^a_k)^2 + (C^a_k)^2 \right] , C(y) \right] = 0}$$