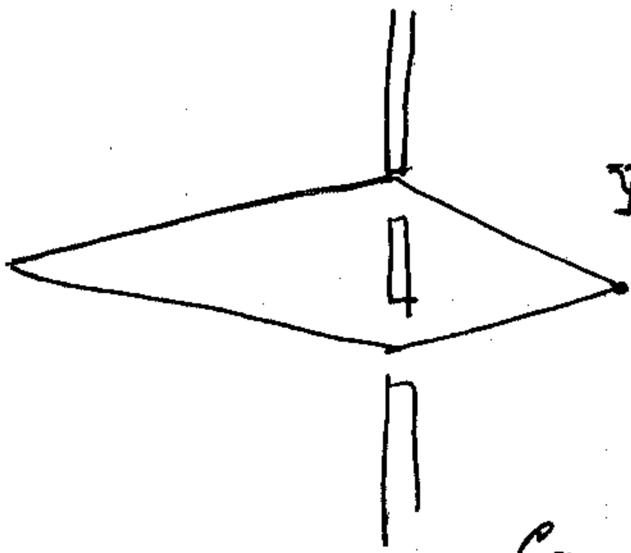
Функциональный инт-л в Квантовой механике

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat H\psi \;\Rightarrow\; \boxed{\psi(t) = \underbrace{e^{-i\hat H(t-t_i)}}_{\boxed{\text{Квантовомеханический пропагатор } \hat U(t,t_i)}}\psi(t_i)}$$

$\boxed{\hbar = 1}$

70% Задач.

Принцип Суперпозиции



Формально

$$\overbrace{\begin{matrix} e^{iS_1} & e^{iS_2} \\ \shortparallel & \shortparallel \end{matrix}}$$

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2$$

1 способ 2 способ.

II

General case: $\Psi = \sum_{\substack{\text{path}\\ x(t)}} \underbrace{\psi[x(t)]}_{\boxed{\text{Функционал от пути}}}$

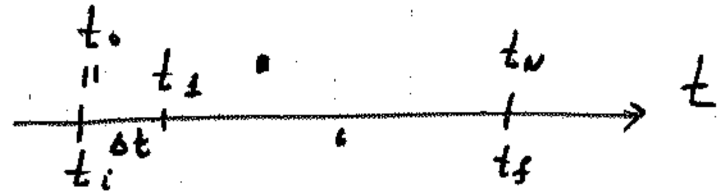
$$\Psi = \int \mathcal{D}x(t)\; e^{iS[x(t)]}$$

Комплексный функционал от пути

$\boxed{\text{Все пути равноправны} \;\leftrightarrow\; S[x(t)] \in \mathbb{R}}$

Формальный вывод

Пропагатор



$$\langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | x_i \rangle = \qquad \boxed{\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}}$$

$$= U(x_f, x_i; t_f - t_i) =$$

$$= \langle x_f | \underbrace{e^{-i\hat{H}\Delta t}\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\, e^{-i\hat{H}\Delta t} \ldots}_{N \text{ штук}} | x_i \rangle =$$

$$\int dx_1 \, |x_1\rangle\langle x_1|$$

$$\hat{1} = \int dx_{N-1} |x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|$$

$$= \langle x_N | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1} | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_{N-2} \rangle \ldots$$

$$\ldots \langle x_1 | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_0 \rangle \int dx_1 \ldots dx_{N-1}$$

Вычислим:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \hat{V}(x)$$

$$U(x_i, x_{i-1}; \Delta t) = \langle x_i | e^{-i\hat{H}\Delta t} | x_{i-1} \rangle =$$

$$= \langle x_i | e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2}\Delta t} \, e^{-i\hat{V}(x)\Delta t} | x_{i-1} \rangle =$$

$$= \int dp_i \, \langle x_i | p_i \rangle \langle p_i | \underbrace{e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2}\Delta t - i\hat{V}(x)\Delta t}}_{\parallel} | x_{i-1} \rangle =$$

$$e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2}\Delta t} \, e^{-i\hat{V}(x)\Delta t} (1 + O(\Delta t^2))$$

$$= \int dp_i \, \frac{e^{ip_i x_i}}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-i\frac{p_i^2}{2}\Delta t - i\hat{V}(x_{i-1})\Delta t} \, \frac{e^{-ip_i x_{i-1}}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \int \frac{dp_i}{2\pi} \exp\left\{ i\Delta t \left(\frac{p_i \Delta x_i}{\Delta t} + \underbrace{\frac{p_i^2}{2} - V(x_{i-1})}_{H(p_i, x_{i-1})} \right) \right.$$

$$\boxed{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$$

$$U(x_f, x_i; t_f - t_i) = \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} \frac{dp_i\,dx_i}{2\pi}\right) \frac{dp_N}{2\pi} \times$$

$$\times \exp\left\{ i \sum_{i=1}^{N} \Delta t \left(p_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t} - H(p_i, x_{i-1})\right)\right\}$$

$$U(x_f, x_i, t_f - t_i) = \int \mathcal{D}p(t)\,\mathcal{D}x(t)\Big|_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \exp\left\{ i\int \left(p\dot q - H(p,q)\,dt\right)\right\}$$

В x – представлении :

$$U(x_i, x_{i-1}; \Delta t) = \int \frac{dp_i}{2\pi}\, e^{-\frac{i}{2}\Delta t\, p_i^2 + i p_i \Delta x_i}\, e^{-i\Delta t V(x_{i-1})} =$$

$$= e^{-i\Delta t V(x_{i-1})} \int \frac{dp_i}{2\pi}\, e^{-\frac{i}{2}\Delta t \left[p_i^2 - p_i \Delta x_i\, 2\, \frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2\right] + \frac{i}{2}\Delta t \Big(}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{i\Delta t}}\, e^{\frac{i}{2}\Delta t \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 - i\Delta t V(x_{i-1})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \Delta t}}\, e^{i\Delta t \underbrace{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 - V(x_{i-1})\right\}}_{\mathcal{L}_i}}$$

Лагранжиан

$$U(x_f, x_i; \Delta t) = \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{dx_k}{\sqrt{2\pi i \Delta t}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi i \Delta t}} \times$$

$$\times\ \mathrm{Exp}\left\{ i \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2 - V(x_{k-1})\right)\Delta t \right\}$$

$$\Big\downarrow\ N\to\infty$$

$$U(x_f, x_i, \Delta t) = \int \mathcal{D}x(t)\Big|_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} e^{iS[x]}.$$

Многомерный функциональный интеграл

$$U(\vec{x}_f, \vec{x}_i; t_f - t_i) = \langle \vec{x}_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | \vec{x}_i \rangle =$$

$$= \int \mathcal{D}\vec{x}(t) \Big|_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} e^{iS[\vec{x}]} =$$

$$= \int \mathcal{D}\vec{p}(t)\, \mathcal{D}\vec{x}(t)\; e^{iS[\vec{x}]} =$$

$$= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\vec{x}_k}{(2\pi i \Delta t)^{D/2}} \right) \frac{1}{(2\pi i \Delta t)^{D/2}}\; e^{iS^{(d)}[\vec{X}(t)]} =$$

D — Кол-во степеней свободы

$$= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{d\vec{p}_k\, d\vec{x}_k}{(2\pi)^D} \right) \int \frac{d\vec{p}_N}{2\pi}\; e^{i \sum_{k=1}^{N} \Delta t \left(\vec{p}_k \frac{\Delta \vec{x}_k}{\Delta t} - h(\vec{p}_k, \vec{x}_k \dots \right.}$$

---

(31) ~~Дано~~:

$$\boxed{L = f(\dot{\vec{q}}^{\,2}) + V(\vec{q})} \qquad \vec{q} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\pi} = 2\dot{\vec{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^{\,2}} = 2\dot{\vec{q}} f'(\dot{q}$$

1) Проквантовать, найти $\hat{H}$

2) Вычислить ф-льный интеграл.

для пропагатора

3) Верна ли формула

$$\boxed{U(\vec{q}_f, \vec{q}_i; t_f - t_i) = \int \mathcal{D}\vec{q}(t)\; e^{iS[\vec{q}]}}\,?$$

— Когда такая формула верна?

Евклидов функциональный интеграл

Рассмотрим величину

$$\boxed{U_E(x_f, x_i; \tau_f - \tau_i) = \langle x_f | e^{-H(\tau_f - \tau_i)} | x_i \rangle}$$

Полезна по 2-м причинам

① $\underbrace{U_E(x_f, x_i; -i(\tau_f-\tau_i)) = U(x_f, x_i; t_f - t_i)}$

Можно восстановить обычный пропагатор.

② $$U_E = \int \prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\, e^{-S_E}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau}}$$

$$\boxed{S_E = \sum_k \Delta t \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2 + V(x_{k-1})\right)}$$

$V(x) > 0 \Rightarrow$ Хорошо сходящийся интеграл!

Или хотя бы ограничена снизу

3.2 Рассмотрим 1-мерный квантовый осциллятор

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + \hat{q}^2}{2}$$

~~Вычисл~~ ① Вычислим Евклидов функциональный интеграл (Записать)

для величины

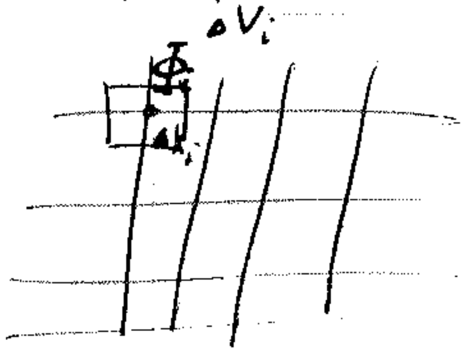
$$U(x_f, x_i; \overset{T}{\cancel{t_f - t_i}}) = \langle x_f | e^{-iH\overset{T}{\cancel{(\tau_f-\tau_i)}}} | x_i \rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\tau}}\, e^{-S_E}$$

② Рассматриваем предел $T \to \infty$ от пропагатора

$U(x_f, x_i; T)$, ~~получить~~ вычислим энергию основного состояния осциллятора и само основное состояние осциллятора.

Функциональный инт-л в теории поля



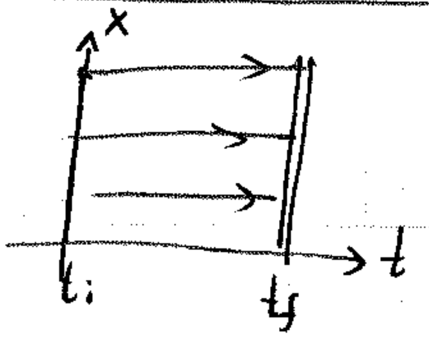
$$\boxed{\pi_i = \dot{\phi}_i}$$

$$\mathcal{L} = \sum_i \Delta V_i \left[\frac{\dot{\phi}_i^2}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{(\phi_i - \phi_{i-1})^2}{(\Delta x_i)^2}}_{\vec{\nabla}\phi_i} - V(\phi_i \right.$$

$$H = \sum_i \Delta V_i \left[\frac{\pi_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\left(\phi(\vec{x}_i) - \phi(\vec{x}_i - \Delta\vec{x}_k)\right)^2}{\Delta x_{i,k}^2} + V(\phi_i) \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U(\phi_f(\vec{x}), \phi_i(\vec{x}), t_f - t_i) = \int \mathcal{D}\Phi \Big|_{\phi(t_i,\vec{x}) = \phi_i(\vec{x})}^{\phi(t_f,\vec{x}) = \phi_f(\vec{x})} e^{iS[\phi(\vec{x},t)]}}$$



Амплитуда перехода между конфигурациями $\phi_i(\vec{x})$ и $\phi_f(\vec{x})$.

По-другому

$$\Phi = \sum e^{ikx_i} \Phi_k$$

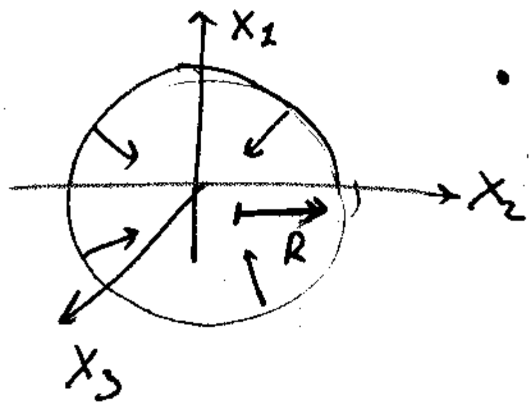
Можно рассматривать как амплитуды

$$\Downarrow$$

По-другому

$$U(\phi_f(\vec{k}), \phi_i(\vec{k}), t_f - t_i) = \int \mathcal{D}\phi(k,t) \Big|_{\phi(t_f,\vec{k}) = \phi_f(\vec{k})}^{\phi(t_i,\vec{k}) = \phi_i(\vec{k})} e^{iS[}$$

Вакуумный функциональный интеграл



- Теория поля

Сферическая волна

$E(R) \propto A^2 R^2 = \text{const}$

A — Амплитуда поля

E — Полная энергия в волне

$$\boxed{A \propto 1/R}$$

В начальный момент времени поле – свободное

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2/2 - V(\phi) \mapsto \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + O(\phi^3)$$

Наше поле при $t = t_i$ = Гармонический осциллятор.

Вакуумные граничные условия (Фейнмановские граничные условия)

Искусственная задача: Рассмотрим 1D осциллятор.

Рассмотрим величину $\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2}}$

$$U_0 = \langle 0| e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} |0\rangle = \langle 0| e^{-i\frac{1}{2}\Delta t} |0\rangle = e^{-\frac{i}{2}\Delta t}$$

Запишем функциональный интеграл для этой величины

$$\int dx_i dx_f \langle 0|x_i\rangle \langle x_i| e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} |x_f\rangle \langle x_f|0\rangle =$$

$$\boxed{\langle x_i|0\rangle = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}}}$$

Проверка $\int dx_i \,|\langle x_i|0\rangle|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\pi^{1/2}}\, dx = 1$

$$\hat{H}\,\psi_0 = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}} =$$

$$= \Bigg(+\underbrace{\frac{1}{2}\partial_x\left(+x\,e^{-x^2/2}\right)}_{\frac{1}{2}e^{-x^2/2} - \cancel{\frac{x^2}{2}e^{-x^2/2}}} + \cancel{\frac{x^2}{2}e^{-x^2/2}}\Bigg)\frac{1}{\pi^{1/4}} = \frac{1}{2}\psi_0$$

$$U_0 = \int dx_i\, dx_f \int\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{dx_k}{\sqrt{2\pi i\Delta t}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi i\Delta t}}\; \underbrace{e^{iS(x_i,\,x_f;\,\Delta t)}}_{\mathrm{Exp}\left(i\sum_{k=1}^{N}\Delta t\left(\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t}\right)^2/2 \;-\; \underbrace{V(x_{k-1})}_{\frac{\omega^2 x_{k-1}^2}{2}}\right)\right)}$$

$$\cancel{U_0 = \int dx_i\, dx_f \int Dx(t)\, e^{iS(x_i,x_f)}}$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Exp}\left\{ i\,\Delta t\left(\underbrace{\frac{(x_1-x_0)^2}{2\Delta t^2}} - \frac{\omega^2 x_0^2}{2} + \frac{(x_2-x_1)^2}{2\Delta t^2} - \frac{\omega^2 x_1^2}{2} + \dots\right.\right.$$

Интеграл по x_i $\equiv x_0$ - гауссов.

Вычислим его.

$$\frac{i\Delta t}{2\Delta t^2}\left(x_0^2 + 2x_0x_1 - \omega^2 x_0^2\,\Delta t^2\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{\pi^{1/4}}\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{x_i^2}{2} + \frac{i}{2\Delta t}\left(x_0^2(1-\omega^2\Delta t^2) - 2x_0x_1\right)\right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\pi^{1/4}}\int dx_1\; \mathrm{Ex}\left(-\frac{1}{2}\left(x_0^2\left(1-\frac{i}{\Delta t}\right) - \frac{2i}{\Delta t}x_0x_1\right) + \dots\right.}$$

$$+ \frac{(1-i/\Delta t)}{(1-i/\Delta t)^2}\frac{x_1^2}{\Delta t^2}\Big) + \frac{1}{2}\frac{x_1^2}{\Delta t^2}\left(1-\frac{i}{\Delta t}\right)$$

Вычислим его

$$\int \Psi_0 U \, dx_i =$$

$$= \int dx_0 \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\omega x_0^2/2} e^{i\Delta t\left(\frac{(x_1-x_0)^2}{2\Delta t^2} - \frac{\omega^2 x_0^2}{2} + \frac{(x_2-x_1)^2}{2\Delta t^2} - \frac{\omega^2 x_1^2}{2} + \dots\right.}$$

$$-\omega x_0 + i\Delta t \frac{(x_0-x_1)}{\Delta t^2} - \cancel{\omega^2 x_0 i\Delta t} \to 0 = 0 \qquad \Delta t \to 0$$

Пример

$$\int dx \, \exp(Ax^2 + Bx + C) = \overbrace{\mathrm{Exp}\left(\cancel{A}\frac{B^2}{4A^2} + \frac{B^2}{4A} + C\right)}^{e^{-B^2/4A}} \frac{\pi^{1/2}}{\sqrt{A}}$$

$$2Ax + B = 0 \qquad x = -B/2A$$

$$A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}\right) + C - \frac{B^2}{4A^2} \cdot A$$

$$\cancel{\int \Psi U dx_i = \int dx \, \pi^{1/4}}$$

$$\boxed{\dot{x}(t_i) - i\omega x(t_i) = 0}$$

$$\int \Psi_0 U dx_i = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{\frac{\omega}{2} - \frac{i\Delta t}{2\Delta t^2}}} = \underbrace{\pi^{-1/4}\sqrt{2i\Delta t \pi}}$$

Удаляет один из фактор

$$\langle 0 | U | 0 \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \Big|_{\text{Вакуумные гран. условия}} e^{iS[x]} =$$

$$= \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{dx_k}{\sqrt{2\pi i \Delta t}}\right) \frac{\sqrt{2\pi i \Delta t}}{\sqrt{\pi}} e^{iS[x]}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\Delta x_0}{\Delta t} - i\omega x_0 = 0 \\ &\frac{\Delta x_N}{\Delta t} + i\omega x_N = 0 \end{aligned}}$$

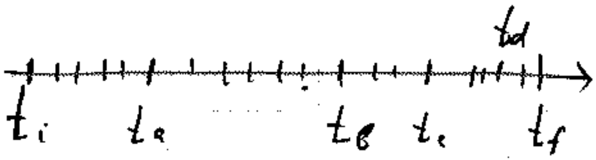
x_0, x_N должны быть выражены из ур-й

Корреляционные функции осциллятора

$$\langle 0|T(x(t_a)\dots x(t_d))|0\rangle = G(t_a, t_b; t_c, t_d) =$$

$$= \langle 0| e^{+i\hat{H}t_a} x(0)\, e^{-iHt_a} e^{+iHt_b} x(0)\, e^{-iHt_b} |0\rangle$$

$$\left\{ x(t_a) = e^{+i\hat{H}t_a} x(0)\, e^{-i\hat{H}t_a} \right\}$$



$$= \int [d\,x(t)]\Big|_{\text{Nac.}} e^{iS(x)}\, x(t_a)\, x(t_b)\, x(t_c)\, x(t_d)$$

Обобщение на случай теории поля

Φ - скалярное поле

$$\underbrace{\langle 0|\Phi_i(\vec{x})\rangle}_{} = \left(\frac{1}{(\omega_k \pi)^{1/4}}\right)^{N_\Phi} e^{-\prod_k \frac{\omega_k \Phi_k^2}{2}}$$

Свободное поле в момент $t = t_i$

$$S = \Delta t \left(\frac{(\phi_{k,1} - \phi_{k,0})^2}{2\Delta t^2} + \frac{\omega_k^2}{2}\phi_{k,0}^2 + \dots \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\int \prod_k d\phi_{i,0}(k) \leftrightarrow \quad \text{Фейнмановские граничные условия}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\Phi}(k) + i\omega_k \Phi(k)\Big|_{t_i} = 0 \\ &\dot{\phi}(k) - i\omega_k \phi(k)\Big|_{t_f} = 0 \end{aligned}}$$

~~Фейнман~~

$$\langle 0|T(\phi(t_a)\phi(t_b)\dots\Phi(t_d))|0\rangle =$$

$$= \int [d\phi(x,t)]\, e^{iS[\phi]}\, \phi(t_a)\dots\phi(t_d)$$

Замечание: Именно T-произведение!

ЗАМ2 В обратном порядке

$$\int d\phi(x,t)\ \phi(x_1,t_1)\ \phi(x_2,t_2)\ e^{iS(x)} = \qquad t_2 > t_1$$

$$= \int d\phi_1(x_1,t_1)\, d\phi(x,t_2)\ \underbrace{[\mathcal{D}\phi(x,t)]\Big|_{t_i}^{t_1} [\mathcal{D}\phi(x,t)]\Big|_{t_1}^{t_2} [\mathcal{D}\phi(x,t)]\Big|_{t_2}^{t_f} e^{iS}}$$

$$\phi(t_1,x_1)\ \phi(t_2,x_2)$$

$$\int d\phi_1\, d\phi_2 \langle 0|\, e^{-iH(t_1-t_i)} |\phi_1\rangle \langle\phi_1|\, e^{-iH(t_2-t_1)} |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\, e^{-iH(t_f-t_2)} |0\rangle =$$

$$= \underline{\langle 0|\ \phi_2(t_2,x_2)\ \phi_1(t_1,x_1)\ |0\rangle}$$

Если $t_2 < t_1$ получаем наоборот

$\Downarrow$

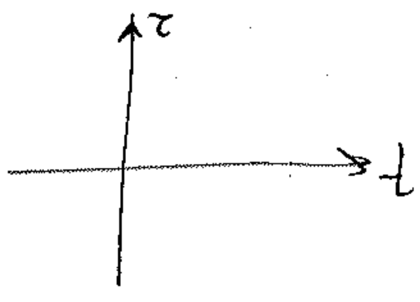
$$\int [d\phi]\, e^{iS}\, \phi(x_1)\,\phi(x_2) = \langle 0|\, T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}\, |0\rangle$$

ЗАМ3 <u>Вакуумные переходы в евклидовом функциональном интеграле</u>

$$\langle 0|\, e^{-HT} |0\rangle \xmapsto{t \Rightarrow -i\tau,\ \tau\in\mathbb{R}}$$

Раздолбай!

$$\frac{d\dot{x}(t_i)}{-i\,d\tau} + i\omega x(t_i) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{d\tau}(\tau_i) + \omega x(\tau_i) =$$



$$x(\tau_i) \sim e^{\omega\tau_i}$$

$x(\tau) \to 0$ при $\tau_i \to -\infty$

Другой способ пониман вакуумные граничные условия

~~$U(\phi_f,$~~

$$G = \int [d\phi]\Big|_{\phi_i}^{\phi_f} \phi(t_a)\dots\phi(t_d)\, e^{iS[\phi]} =$$

$$= \langle\phi_f| \overset{e^{+iHt_f}}{\vphantom{T}} T\{\phi(t_a)\dots\phi(t_d)\} \overset{e^{-iHt_i}}{\vphantom{T}} |\phi_i\rangle =$$

Если $\boxed{t_f - t_i \mapsto \infty(1-i\epsilon)}$

То

$$e^{-iHt_i}|\phi_i\rangle \mapsto e^{-iE_n t_i}\sum |E_n\rangle\langle E_n|\phi_i\rangle \Rightarrow$$

$$\mapsto |0\rangle\langle 0|\phi_i\rangle e^{-iE_0 t_i}$$