

Задачи-3

Квантовая теория поля - 5 курс, 1 семестр.

Для получения зачета/экзамена требуется решить 14 задач или более.

1. Показать, что связи ϕ_a , которые остаются после решения системы уравнений на множители Лагранжа u_m , являются величинами I рода. Показать, что гамильтониан является величиной I рода.
2. Показать, что при выводе скобки Пуассона генераторов двух малых калибровочных преобразований с параметрами ϵ_a и δ_a можно опустить члены, пропорциональные $\epsilon_a \epsilon_b$ и $\delta_a \delta_b$.
3. Проквантовать канонически электромагнитное поле.
4. *Квантовая космология.* Рассмотрим однородную изотропную замкнутую Вселенную,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(a^2 N^2, -a^2 \gamma_{ij}), \quad (1)$$

где $a(t)$ - радиус Вселенной, $N(t)$ - функция временного сдвига, γ_{ij} - метрика единичной трехмерной сферы. Подставим метрику (1) в действие Гильберта-Эйнштейна с космологической постоянной Λ . Получим:

$$S_{EH} = \int d\eta \left(-\frac{\dot{a}^2}{2N} + N \left[\frac{a^2}{2} - \Lambda a^4 \right] \right), \quad (2)$$

где использованы безразмерные планковские единицы. Действие (2) инвариантно относительно калибровочных преобразований:

$$t \rightarrow t'(t), \quad N \rightarrow N'(t') = \frac{dt}{dt'} N(t), \quad a \rightarrow a'(t') = a(t). \quad (3)$$

- (a) Построить гамильтонов формализм. Найти гамильтониан и связи I рода.
- (b) Проквантовать, наложив связи на волновую функцию. Показать, что волновая функция Вселенной подчиняется уравнению Уилера - Де Витта,

$$\mathcal{H}\Psi = 0, \quad (4)$$

где \mathcal{H} - гамильтониан Вселенной, $\Psi(a)$ - ее волновая функция.

- (c) Выписать функциональный интеграл.
- (d) Найти квазиклассические решения уравнений Уилера - Де Витта. Показать, что эволюция классической Вселенной описывается уравнением Фридмана.

5. Рассмотрим частицу на двумерной сфере:

$$S = \int dt (\dot{\mathbf{x}}^2/2 + \lambda(\mathbf{x}^2 - 1)) ,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, λ - множитель Лагранжа.

(a) Выписать лагранжевы и гамильтоновы уравнения движения.

(b) Проквантовать.

6. Проквантовать канонически поле Дирака.