Задачи-2

Квантовая теория поля - 5 курс, 1 семестр.

Для получения зачета требуется решить более 70% задач, заданных на протяжении семестра.

1. Рассмотрим действительное скалярное поле на пространственно-временной решетке размера L и шагом ϵ (рассматривалось на лекции): $\phi\left(x_i\right)$, где индексы $i = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ пробегают целые точки внутри четырехмерного куба объема $V = L^4$. Показать, что преобразование от переменных $\phi\left(x_i\right)$ к переменным $\phi_n \equiv \phi\left(k_n\right)$, $\;k_n^0 \geq 0$ (где $k_n^\mu = \frac{2\pi n^\mu}{L}$, $|n| < \frac{L}{\epsilon}$) посредством

$$\phi\left(x_i\right) = \frac{1}{V}\sum_n \mathrm{e}^{-ik_n x_i}\phi_n$$

является унитарным преобразованием. Показать, что мера интегрирования в функциональном интеграле, определенном как решеточный предел к непрерывному пространству ($L \to \infty$, $\epsilon \to 0$), может быть выражена следующим образом

$$\mathcal{D}\phi\left(x\right) \equiv \prod_n d\phi\left(x_i\right) = \mathcal{A}\prod_{k_n^0 \geq 0} d\mathrm{Re}\phi_n \cdot d\mathrm{Im}\phi_n,$$

где константа $\mathcal{A}$ не зависит от полевых переменных ϕ.

2. В теории с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

используя метод производящего функционала $Z[J]$, вычислить четырехточечную функцию Грина в порядке λ^2 теории возмущений. Убедиться, что стандартная теория возмущений для функций Грина воспроизводится этим вычислением.

3. Рассмотрим функцию Грина

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = Z^{-1}\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x)\ \mathrm{e}^{i\int d^4x\mathcal{L}}$$

(Z — нормировочный множитель). Сделать замену переменных в функциональном интеграле

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \epsilon(x),$$

где ϵ мало. Используя инвариантность функционального интеграла относительно этой замены, получить уравнение на двухточечную функцию Грина.

4. В теории

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

в порядке $g^2,\ \lambda^2,\ g\lambda^2$ теории возмущений показать явным вычислением, что производящий функционал для функций Грина $Z[j]$ связан с производящим функционалом для связных функций Грина $W[j]$ соотношением

$$Z[j] = \mathrm{e}^{iW[j]}.$$