

Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

**Ограничение отклонений от Лоренц-инвариантности в
секторе темной материи с использованием
космологических данных**

Курсовая работа
студента
Иванова М. М.

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Сибиряков С. М.

Допущен к защите
« » мая 2012 г.
Зам. зав. кафедрой
физики частиц и космологии
д.ф.-м.н, проф. Белокуров В. В.

Москва 2012

Содержание

1	Введение	1
2	Эйнштейн-эфир гравитация	2
3	Лоренц-нарушение в тёмной материи: случай точечных частиц и Ньютонов предел	4
4	Лоренц-нарушение в тёмной материи: общий случай	10
4.1	Взаимодействие тёмной материи с эфиром	10
4.2	Однородное решение	11
4.3	Линеаризованные уравнения на фоне метрики Фридмана	12
5	Космологические возмущения: качественный анализ	14
5.1	Различные режимы эволюции	14
5.2	Спектр мощности возмущений	20
6	Космологические возмущения: численный анализ	24
7	Заключение	28
A	Эффективное описание тёмной материи в терминах идеальной жидкости	29
A.1	Линеаризованные вклады	32
B	Комментарии к численному решению	33

1 Введение

Лоренц-инвариантность лежит в основе современной физики. Тем не менее, некоторые подходы к квантованию гравитации предсказывают отклонения от этой симметрии ([1]). Теории гравитации с нарушением Лоренц-инвариантности предсказывают появление новых степеней свободы (полей), которые могут различным образом взаимодействовать с другими полями во Вселенной и, таким образом, вносить Лоренц-нарушение в соответствующие сектора. Лоренц-нарушение в секторе обычной материи жестко ограничено экспериментальными данными ([2]) и космологические следствия подобного нарушения пренебрежимо малы после учета этих ограничений. Но для тёмной материи и тёмной энергии не существует прямого экспериментального свидетельства сохранения лоренцевой симметрии. Возможные космологические проявления Лоренц-нарушения в тёмной энергии уже были изучены в работе ([3]). Кроме того, было показано, что отклонение от этой важной симметрии обеспечивает механизм появления малой и устойчивой относительно квантовых поправок эффективной космологической постоянной.

Целью данной работы является изучение космологических следствий Лоренц-нарушения в секторах гравитации и тёмной материи, особое внимание уделено эффектам, связанным с ростом структур во Вселенной.

Работа структурирована следующим образом: в секции (2) приведены основные сведения из Эйнштейн-эфир гравитации, эффективной теории поля, в контексте которой мы рассматриваем Лоренц-нарушение на протяжении всей работы. В секции (3) мы изучаем Лоренц-нарушение в тёмной материи для случая точечных частиц в Ньютоновом пределе и также качественно исследуем динамику Джинсовских неустойчивостей в "Ньютоновом" описании расширяющейся Вселенной. В секции (4) мы применяем общее эффективное описание тёмной материи в рамках приближения идеальной жидкости, изучаем однородную космологическую эволюцию модели и получаем линеаризованные уравнения для космологических возмущений. Подробности Лагранжева для описания жидкостей приведены в Приложении (А). Далее, в секции (5) мы решаем аналитически линеаризованные уравнения в различных частных случаях. В секции (6) приведены результаты численного интегрирования возмущенных уравнений. Подробности численной процедуры и выбора начальных условий приведены в Приложении (В). Секция 7 отведена конечным результатам и выводам.

2 Эйнштейн-эфир гравитация

В данной работе Лоренц-нарушение рассматривается в контексте Эйнштейн-эфир гравитации ([4],[5] [6]). В дополнение к метрике $g_{\mu\nu}$ такая теория гравитации привлекает динамическое времени-подобное векторное поле u_μ единичной длины. Подобно метрике и в отличие от других классических полей, единичное по определению векторное поле не может "исчезнуть" во всём пространстве. Таким образом, оно задает выделенную систему отсчета и нарушает локальную Лоренц-инвариантность в ОТО до подгруппы вращения. Векторное поле определяет конгруэнцию времени-подобных кривых во всем пространстве, подобно некой вездесущей жидкости и поэтому было названо "эфир".

Главная мотивация в изучении Эйнштейн-эфир теории исходит из посылок квантовой гравитации и предположении о том, что гравитационный вакуум может определять выделенную макроскопически систему отсчета. Особый интерес представляют частные случаи рассматриваемой теории, допускающие "ультрафиолетовое" пополнение в контексте Хоржава-Лифшиц гравитации (см ниже).

Итак, Эйнштейн-эфир теория включает в себя обычную Эйнштейновскую гравитацию с действием¹

$$S_{GR} \equiv -\frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1)$$

и минимально связанное единичное векторное поле, наиболее общее действие которого

¹Используется сигнатура метрики $(+, -, -, -)$. M_p в действии Эйнштейна-Гилберта является параметром, связанным с Планковской массой M_{Planck} .

с производными не более чем второго порядка имеет вид

$$S_{\text{э}} \equiv -\frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\mu u^\sigma \nabla_\nu u^\rho + l(u_\mu u^\mu - 1) \right], \quad (2)$$

где

$$K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \equiv c_1 g^{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + c_2 \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu + c_3 \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + c_4 u^\mu u^\nu g_{\sigma\rho}, \quad (3)$$

l является множителем Лагранжа, фиксирующим единичную норму вектора эфира,

$$u_\mu u^\mu = 1. \quad (4)$$

Если мы настаиваем на существовании известного "ультрафиолетового" пополнения для Эйнштейн-эфир гравитации, то имеет смысл ограничить эфир до продольной части, названной хронон ([7])

$$u_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \varphi}{\sqrt{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}}. \quad (5)$$

Отсутствие вихревой компоненты эфира

$$\omega^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \nabla_\rho u_\sigma = 0, \quad (6)$$

приводит к тому, что оператор с коэффициентом c_1 в (3) выражается в виде суммы операторов с коэффициентами c_3 и c_4 . Поэтому, в случае хронона результат эффективно зависит от трех констант, и будет целесообразно переопределить свободные безразмерные параметры Лоренц-нарушения в гравитации:

$$\alpha = c_1 + c_4, \quad (7a)$$

$$\beta = c_1 + c_3, \quad (7b)$$

$$\lambda = c_2. \quad (7c)$$

Также в этом частном случае теории со скалярным полем имеется дополнительная симметрия (f -произвольная функция):

$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi} = f(\varphi). \quad (8)$$

В такой теории вектор эфира ортогонален семейству 3-х мерных пространственно-временных поверхностей, задающих расслоение пространства-времени. Эти поверхности параметризуются как поверхности постоянного значения функции $\varphi(x)$. Модель была предложена в работах ([7], [8], [9]) и названа "хронометрической" потому, что вводит понятие выделенной координаты времени через поле $\varphi(x)$ - "хронон". Как показано в ([7],[9],[10]), действие хронона, получаемое из действия (2) после переопределения безразмерных констант (7), описывает низкоэнергетичный предел Хоржава-Лифшиц гравитации [1]. Последняя рассматривается как кандидат на перенормируемую модель квантовой гравитации.

Экспериментальные и наблюдательные данные налагают ряд ограничений на параметры Лоренц-нарушения α, β, λ . В общем случае из ограничения на параметры Пост-Ньютоновского формализма (PPN) $\alpha_1^{PPN}, \alpha_2^{PPN}$ следует что α, β, λ должны быть меньше, чем 10^{-6} [7]. В частном случае $\beta = 0, \alpha = \lambda$ параметр α_2^{PPN} зануляется и ограничения

менее жестки: $\alpha, \lambda < 10^{-4}$. В случае $\alpha = 2\beta$ оба Пост-Ньютоновских параметра пропадают, но из данных первичного нуклеосинтеза ([11]) и излучения гравитационных волн в двойных системах ([12]) следует $\alpha, \beta, \lambda \lesssim 0.01$.

Физически, Эйнштейн-эфир теория отличается от хронометрической присутствием поперечных векторных мод. Однако, как мы увидим в дальнейшем, векторные моды не влияют ни на однородное расширение Вселенной, ни на линейную эволюцию скалярных космологических возмущений. Отметим лишь, что поперечные возбуждения могут привести к интересным эффектам в поляризации реликтового излучения ([13]). Далее мы будем рассматривать общий случай Эйнштейн-эфир гравитации и перейдем к хронометрической теории лишь при изучении скалярных космологических возмущений, для которых данные модели эквивалентны.

Помимо гравитации, мы рассматриваем также Лоренц-нарушение в секторе тёмной материи. В изучаемой модели Вселенная заполнена обычной барионной материей (b), излучением (γ), холодными частицами (WIMP) тёмной материи (dm), космологической постоянной (плотностью энергии вакуума V_0) и эфиром u_μ , взаимодействующим с тёмной материей:

$$S \equiv S_{GR} + S_{SM} + S_{dm} + S_\varepsilon + S_{\varepsilon-dm} . \quad (9)$$

Действие для обычной материи, излучения и космологической постоянной имеет вид:

$$S_{SM} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{SM} - V_0) . \quad (10)$$

Член $S_{\varepsilon-dm}$ описывает взаимодействие эфира и тёмной материи. Рассмотрим сперва этот член в контексте точечных частиц, что позволит нам изучить Ньютонов предел теории. Впоследствии мы применим общий формализм для эффективного описания релятивистских жидкостей и изучим космологические эффекты в рассматриваемой модели.

3 Лоренц-нарушение в тёмной материи: случай точечных частиц и Ньютонов предел

В данной секции мы рассмотрим эффекты взаимодействия тёмной материи с полем эфира на примере точечных частиц. Подобное исследование позволит нам лучше понять физику в рассматриваемой модели. Начнем с одиночной частицы тёмной материи с массой m . Действие для неё в стандартном (Лоренц-ковариантном) случае имеет вид (τ -аффинный параметр вдоль мировой линии частицы):

$$S_{pp} = -m \int ds = -m \int d\tau \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{1/2} , \quad (11)$$

После введения поля эфира существует множество способов обобщить известное действие. Запишем его в виде разложения в ряд:

$$S_{\varepsilon-pp} = -m \sum_{n=0} y_n \int d\tau \left(u_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)^n \left(g_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{(1-n)/2} , \quad (12)$$

где параметр $y_0 = 1$. Как видно, частицы тёмной материи с данным действием не только нарушают принцип эквивалентности, но и не следуют геодезическим ни для какой метрики.

Теперь изучим Ньютонів предел теории. Для этого разложим действие (12) до квадратичного порядка по скорости частицы

$$v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}, \quad t \equiv x^0, \quad (13)$$

и линейного по гравитационному потенциалу (предполагается, что система вириализована, т.е. $O(v^2) \sim O(\phi)$). Последний возникает в стандартном пределе в Ньютонів калибровке:

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}(1 - 2\psi). \quad (14)$$

Поскольку *a priori* нам неизвестно значение u^i в Ньютонів пределе, то мы предположим наибольшее возможное значение $u^i \sim O(v)$. Используя единичную нормировку эфира, получаем

$$u^0 = 1 + \phi + \frac{(u^i)^2}{2}, \quad u_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = u_0 - u^i v^i = 1 + \phi + \frac{(u^i)^2}{2} - u^i v^i, \quad (15)$$

и находим действие эфира в Ньютонів пределе

$$S_{\text{эфир}} = m \int dt \left[(1 + Y_2) \frac{(v^i)^2}{2} - (1 + Y_1 + Y_2) \phi + Y_1 \left(u^i v^i - \frac{(u^i)^2}{2} \right) \right] - m \int dt (1 + Y_1 + Y_2). \quad (16)$$

В последнем выражении мы ввели обозначения

$$Y_1 \equiv \sum_{n=1} n y_n, \quad Y_2 \equiv \sum_{n=1} (1 - n) y_n, \quad (17)$$

и последний член в (16) отвечает массе покоя. Отметим несколько эффектов, возникших в Ньютонів пределе. Во-первых, изменилась инертная масса частицы. Во вторых, взаимодействие с гравитационным потенциалом теперь зависит от констант связи Y_1, Y_2 . В третьих, присутствует линейное взаимодействие между возмущением эфира и скоростью частицы. Это приводит к появлению силы между частицами, зависящей от скорости.

Далее, примем во внимание действие гравитации и эфира в нерелятивистском пределе:

$$S_{GR} = M_p^2 \int d^4x (2\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = M_p^2 \int d^4x \phi \Delta \phi. \quad (18)$$

$$S_{\text{эфир}} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x [c_1 u^i \Delta u^i - (c_2 + c_3) (\partial_i u^i)^2]. \quad (19)$$

Отметим, что в последнем выражении мы пренебрегли вкладом гравитационного потенциала, что законно при малых константах связи $c_i \ll \{Y_1, Y_2, 1\}$. Главная задача этого раздела – качественно понять физику в рассматриваемой модели, поэтому в дальнейших рассуждениях для простоты мы положим $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ и $c_1 \ll 1$.

После вариации действия (16) получаем уравнения движения частицы тёмной материи, взаимодействующей с эфиром:

$$(1 + Y_2)\dot{v}^i + (1 + Y_1 + Y_2)\partial_i\phi + Y_1(-v^j\partial_i u^j + v^j\partial_j u^i + \partial_t u^i + u^j\partial_i u^j) = 0. \quad (20)$$

Чтобы получить уравнения для потенциала и эфира перепишем действие (16) в терминах плотности массы частицы $\rho \equiv m\delta^{(3)}(x^i - x^i(t))$,

$$S_{\text{э-pp}} = \int d^4x \rho \left[(1 + Y_2)\frac{(v^i)^2}{2} - (1 + Y_1 + Y_2)\phi + Y_1 \left(u^i v^i - \frac{(u^i)^2}{2} \right) \right]. \quad (21)$$

Окончательно, имеем:

$$2M_p^2\Delta\phi = (1 + Y_1 + Y_2)\rho, \quad (22)$$

$$M_p^2 c_1 \Delta u^i = Y_1(-v^i + u^i)\rho. \quad (23)$$

Последний член в действии (21) эффективно описывает массу возмущения эфира в среде. Поэтому эффекты эфира могут быть экранированы внутри плотного объекта, т.е. реализован "хамелеонный" механизм ([14]). Как видно из уравнения (23), внутри такого объекта эфир находится в равновесии с тёмной материей

$$u^i = v^i. \quad (24)$$

Найдем условия экранировки. Рассмотрим слабые (по сравнению с возмущениями скоростей) возмущения эфира. Тогда решение уравнений (22), (23) имеет вид:

$$u^i = -\frac{2Y_1}{(1 + Y_1 + Y_2)c_1} \phi(x, t) v^i(t), \quad (25)$$

Из условия $u^i \ll v^i$ немедленно получаем:

$$\phi \ll \frac{c_1}{Y_1} \ll 1. \quad (26)$$

В противном случае

$$\phi \gtrsim \frac{c_1}{Y_1}, \quad (27)$$

возникает экранировка и мы видим, что появление или отсутствие режима экранировки полностью определяется гравитационным потенциалом.

Необходимо заметить, что в отличие от обычного хамелеонного механизма, любой движущийся объект будет являться источником возмущений эфира. Рассмотрим шар (например, сгусток частиц тёмной материи), движущийся со скоростью $v_{(1)}^i$ и имеющий на поверхности гравитационный потенциал, удовлетворяющий 27 (т.е. находящийся в режиме экранировки). Тогда создаваемые шаром возмущения эфира вне его радиуса $r_{(1)}$ (см (23)):

$$u^i = \frac{r_{(1)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|} v_{(1)}^i. \quad (28)$$

Это поле будет влиять на движение пробной частицы, взаимодействующей с эфиром. Однако, другой плотный шар, находящийся в режиме экранировки не будет чувствовать данного поля, так как внутри другого шара возмущения эфира совпадают со

скоростью среды $v_{(2)}^i$. Подставив это значение в (21) получим обычное действие для гравитирующей материи в Ньютоновом пределе

$$S_{ball} = \int d^4x \rho_{eff} \left[\frac{(v_{(2)}^i)^2}{2} - \phi \right], \quad (29)$$

с перешкалированной плотностью массы:

$$\rho_{eff} \equiv \rho (1 + Y_1 + Y_2). \quad (30)$$

Таким образом, после проделанной подстановки, динамика шаров подчиняется принципу эквивалентности. Итак, мы получили что в случае экранировки динамика двух шаров тёмной материи, как и каждого шара по отдельности описывается обычной гравитацией. С другой стороны, если хотя бы один из шаров не находится в режиме экранировки, то могут возникнуть нетривиальные эффекты.

Теперь рассмотрим два шара тёмной материи, разведенных на большое расстояние в отсутствие экранировки. Тогда их можно рассматривать как точечные частицы и пренебречь членами порядка $O((u^i)^2)$ в уравнении движения (20). Отсюда получим уравнение на ускорение второй частицы в поле, создаваемом первой:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{(2)}^i = & - \left(1 + \frac{Y_1}{1 + Y_2} \right) \partial_i \phi_{(1)} \\ & + \frac{2Y_1^2}{(1 + Y_1 + Y_2)(1 + Y_2)c_1} \left[-v_{(2)}^j v_{(1)}^j \partial_i \phi_{(1)} + v_{(1)}^i v_{(2)}^j \partial_j \phi_{(1)} + \phi_{(1)} \partial_t v_{(1)}^i - v_{(1)}^i v_{(1)}^j \partial_j \phi_{(1)} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

В последнем уравнении мы использовали выражение для эфира (25) и обозначили за $\phi_{(1)}$ потенциал первой частицы, создаваемый на месте второй. Отсюда видно два новых эффекта: появление дополнительной гравитационной силы с эффективной константой связи $Y_1/(1 + Y_2)$, и зависящей от скоростей силы, описываемой второй строкой в уравнении. Последняя сила важна только для достаточно быстрых частиц,

$$|\mathbf{v}| \gtrsim \sqrt{\frac{c_1}{Y_1}}. \quad (32)$$

Вскоре мы убедимся, что такой режим никогда не наступает для космологических возмущений, исследуемых в данной работе, и доминирующим эффектом будет усиление гравитации. Однако, присутствие силы, зависящей от скоростей может быть интересно в контексте динамики нелинейных структур, таких как галактики и скопления галактик.

Обсудим на качественном уровне, как эффективное усиление гравитации может повлиять на рост Джинсовских неустойчивостей в ранней Вселенной. Для "Ньютонова" описания расширяющейся Вселенной мы используем уравнение непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0, \quad (33)$$

вместе с уравнениями (20), (22), (23). Фоновые решения, описывающие Хаббловский поток:

$$\bar{v}^i = \bar{u}^i = H(t)x^i, \quad \rho = \bar{\rho}(t), \quad \bar{\phi} = \frac{\bar{\rho}_{eff}(t)}{12M_p^2}|x|^2. \quad (34)$$

Подставив этот анзац в уравнение (20) и используя

$$\dot{v}^i = \partial_t v^i + v^j \partial_j v^i, \quad (35)$$

получим:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\bar{\rho}_{eff}}{6M_p^2}. \quad (36)$$

Мы нашли стандартное космологическое уравнение движения для эффективной плотности энергии (30). Уравнения (33) и (36) имеют интеграл:

$$H^2 = \frac{\bar{\rho}_{eff}}{3M_p^2}. \quad (37)$$

Как мы увидим в дальнейшем, это выражение справедливо также и в релятивистском случае. Запишем теперь уравнения для линейных возмущений:

$$(1 + Y_2)(\partial_t v^i + Hx^j \partial_j v^i + Hv^i) + (1 + Y_1 + Y_2)\partial_i \phi + Y_1(\partial_t u^i + Hx^j \partial_j u^i + Hu^i) = 0, \quad (38a)$$

$$2M_p^2 \Delta \phi = (1 + Y_1 + Y_2)\bar{\rho}\delta, \quad (38b)$$

$$M_p^2 c_1 \Delta u^i = Y_1 \bar{\rho}(-v^i + u^i), \quad (38c)$$

$$\partial_t \delta + Hx^i \partial_i \delta + \partial_i v^i = 0. \quad (38d)$$

Здесь мы определили контраст плотности как $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$. Прделаем Фурье-преобразование

$$\delta \mapsto e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/a(t)}\delta, \text{ etc. , где } a(t) \equiv \exp\left[\int^t H(t')dt'\right]. \quad (39)$$

Рассмотрим сначала скалярные возмущения. Используя подстановку

$$v^i = ik_i v, \quad u^i = ik_i u, \quad (40)$$

находим из (38a-38d):

$$(1 + Y_2)(\partial_t v + Hv) + (1 + Y_1 + Y_2)\frac{\phi}{a} + Y_1(\partial_t u + Hu) = 0, \quad (41a)$$

$$-2M_p^2 \frac{k^2}{a^2} \phi = (1 + Y_1 + Y_2)\bar{\rho}\delta, \quad (41b)$$

$$-c_1 M_p^2 \frac{k^2}{a^2} u = Y_1 \bar{\rho}(-v + u), \quad (41c)$$

$$\partial_t \delta - \frac{k^2}{a} v = 0. \quad (41d)$$

Выражая ϕ и v из (41b), (41c), получаем 2 уравнения:

$$(1 + Y_2)(\partial_t^2 \delta + 2H\partial_t \delta) - \frac{3(1 + Y_1 + Y_2)H^2}{2} \delta + Y_1 \frac{k^2}{a} (\partial_t u + Hu) = 0, \quad (42)$$

$$\left[c_1 M_p^2 \frac{k^2}{a^2} + Y_1 \bar{\rho} \right] u = \frac{Y_1 \bar{\rho} a}{k^2} \partial_t \delta, \quad (43)$$

где мы использовали уравнение Фридмана (37) чтобы выразить слагаемое во втором члене через параметр Хаббла. Из второго уравнения видно, что существует два режима. Для больших длин волн,

$$\frac{k^2}{a^2} \ll \frac{Y_1 \bar{\rho}}{M_p^2 c_1}, \quad (44)$$

мы получаем

$$u = \frac{a}{k^2} \partial_t \delta. \quad (45)$$

Подставив это выражение в уравнение (42), получаем стандартное уравнение

$$\partial_t^2 \delta + 2H \partial_t \delta - \frac{3H^2}{2} \delta = 0, \quad (46)$$

с решением $\delta \propto t^{2/3}$ для параметра Хаббла на материально-доминированной стадии $H = 2/(3t)$ (напомним, что t –время в сопутствующей системе отсчета). В данном режиме гравитационный потенциал удовлетворяет условию

$$\bar{\phi} \sim \frac{\bar{\rho}}{M_p^2} \frac{a^2}{k^2} \gg \frac{\bar{\rho}}{M_p^2} \cdot \frac{M_p^2 c_1}{Y_1 \bar{\rho}} = \frac{c_1}{Y_1}. \quad (47)$$

Поэтому на рассматриваемых масштабах эффекты Лоренц-нарушения экранированы (см 27) и эволюция возмущений происходит так же, как и в стандартном случае.

Для коротких длин волн

$$\frac{k^2}{a^2} \gg \frac{Y_1 \bar{\rho}}{M_p^2 c_1}, \quad (48)$$

возмущения эфира равны

$$u = \frac{Y_1 \bar{\rho} a^3}{c_1 M_p^2 k^4} \partial_t \delta. \quad (49)$$

Эфир дает лишь пренебрежимо малую поправку в (42) и его можно отбросить. В итоге получаем уравнение на возмущения:

$$\partial_t^2 \delta + 2H \partial_t \delta - \frac{(1 + Y_1 + Y_2)}{(1 + Y_2)} \cdot \frac{3H^2}{2} \delta = 0. \quad (50)$$

Растущее решение имеет вид $\delta \propto t^\gamma$, где

$$\gamma = \frac{1}{6} \left[-1 + \sqrt{25 + \frac{24Y_1}{1 + Y_2}} \right], \quad (51)$$

Короткие моды не находятся в режиме экранировки потому, что соответствующие гравитационные потенциалы малы (26). Из общего вида уравнения (42) (см также(31)) ясно, что усиление роста возмущений происходит из-за перенормировки гравитационного взаимодействия вследствие Лоренц-нарушения. Характерные возмущения скоростей также малы в данном режиме, поэтому силой, зависящей от скоростей можно пренебречь (см (32), (40)):

$$|\mathbf{v}| \sim H \delta \frac{a}{k} \ll H \delta \sqrt{\frac{M_p^2 c_1}{Y_2 \bar{\rho}}} \sim \delta \sqrt{\frac{c_1}{Y_2}} \ll \sqrt{\frac{c_1}{Y_2}}, \quad (52)$$

В главе (5) мы увидим, что рассуждения этого раздела находятся в полном согласии с результатами, найденными при решении линеаризованных уравнений для космологических возмущений.

Рассмотрим теперь векторные моды. Из уравнений (38a) – (38d) получаем:

$$(1 + Y_2)(\partial_t v_\perp^i + H v_\perp^i) + Y_1(\partial_t u_\perp^i + H u_\perp^i) = 0 , \quad (53)$$

$$\left[M_p^2 c_1 \frac{k^2}{a^2} + Y_1 \bar{\rho} \right] u_\perp^i = Y_1 \bar{\rho} v_\perp^i . \quad (54)$$

Легко увидеть, что в обоих случаях (коротких и длинных длин волн) данные соотношения сводятся к стандартному уравнению

$$\partial_t v_\perp^i + H v_\perp^i = 0 , \quad (55)$$

поэтому векторные моды затухают точно так же, как и в Лоренц-инвариантном случае.

4 Лоренц-нарушение в тёмной материи: общий случай

Для объяснения явлений вне Ньютонова предела и в которых участвует множество частиц, удобно использовать описание тёмной материи в рамках релятивистских эффективных жидкостей. Как принято, мы считаем что тёмная материя на космологических масштабах хорошо удовлетворяет приближению идеальной жидкости. Для описания этой компоненты мы будем следовать формализму, предложенному в ([15], [16]). Подробности см. в Приложении (A).

4.1 Взаимодействие тёмной материи с эфиром

Чтобы описать взаимодействие между эффективной жидкостью (тёмной материей) и эфиром, обсудим сначала, какие связи между ними могут возникнуть на фундаментальном уровне. Для конкретности предположим, что частицы тёмной материи являются массивными фермионами, описываемыми полем Ψ . Тогда возможны следующие члены взаимодействий размерности 3 или 4 (в ГэВ):

$$g_1 u^\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi , \quad g_2 u^\mu u^\nu \bar{\Psi} \gamma_\mu \nabla_\nu \Psi , \quad g_3 u^\mu u^\nu \nabla_\nu (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) , \quad g_4 u^\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \nabla_\nu u^\nu , \quad (56)$$

где константа взаимодействия g_1 имеет размерность массы, а константы g_2, g_3 и g_4 безразмерны. Члены взаимодействия с большими размерностями имеют константы связей с отрицательной размерностью, поэтому после перехода к эффективной теории они будут подавлены масштабom обрезания теории Λ_{UV} .

Чтобы перейти к гидродинамическому описанию взаимодействия, нам необходимо посчитать тензор энергии-импульса фундаментального лагранжиана с членами (56) при низких энергиях и усреднить его по состояниям с ненулевым числом частиц. Легко показать, что усредненный тензор энергии-импульса может быть получен напрямую из

лагранжиана с усредненными операторами взаимодействия, поэтому для эффективного описания жидкости при малых энергиях достаточно рассмотреть "усредненный" лагранжиан. Тогда

$$\langle \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \rangle \propto j_\mu = \frac{\rho}{m} v_\mu, \quad \langle \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi \rangle \propto \rho v_\mu v_\nu, \quad (57)$$

где j_μ ток частиц, ρ –плотность энергии тёмной материи, m –масса частиц, её составляющих, v_μ –вектор скорости. Таким образом мы получили, что члены (56) ведут к эффективным взаимодействиям вида

$$-y_1 \rho (u_\mu v^\mu), \quad -y_2 \rho (u_\mu v^\mu)^2, \quad (58)$$

где приняты обозначения $y_1 \sim -g_1/m$, $y_2 \sim -g_2$. Из операторов старших размерностей возникнут члены с факторами

$$\frac{\rho^{1/4}}{\Lambda_{UV}}, \quad \frac{k_\mu}{\Lambda_{UV}}, \quad \frac{m}{\Lambda_{UV}}. \quad (59)$$

В предположении $\rho^{1/4} \ll m < \Lambda_{UV}$ последние члены подавлены и мы не будем их рассматривать далее. Константы связи y_1, y_2 суть те же самые, что фигурировали в разделе (3). В Ньютоновом пределе вся физика в рассматриваемой модели эффективно зависела не от бесконечного числа y_i , а от их комбинаций (17). Вернемся к этим обозначениям:

$$y_1 = Y_1 + 2Y_2, \quad y_2 = -Y_2.$$

4.2 Однородное решение

Для однородного изотропного решения мы рассматриваем метрику Фрийдмана:

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (60)$$

вместе с анзацем $\phi^i = x^I$, $u_0 = N(t)$, $u_i = 0$, $v_\mu = u_\mu$, $B = a^{-6}$ (см. (A)). Подставив эти выражения в действие (9), получаем:

$$S = \int d^4x N \left[-\frac{M_p^2(6 + 3c_1 + 9c_2 + 3c_3)}{2} \frac{a\dot{a}^2}{N^2} - \rho_0(1 + Y_1 + Y_2) - a^3 \rho_{[m]} - a^3 \rho_{[\gamma]} - a^3 V_0 \right], \quad (61)$$

После вариации по N получаем стандартное уравнение Фрийдмана с $H = \dot{a}/(aN)$:

$$H^2 = \frac{8\pi G_{cosm}}{3} (\rho_{[dm]} + \rho_{[m]} + \rho_{[\gamma]} + V_0), \quad (62)$$

где мы ввели обозначения

$$G_{cosm} = \frac{1}{8\pi M_p^2} \left[1 + \frac{c_1 + 3c_2 + c_3}{2} \right]^{-1}, \quad (63)$$

$$\rho_{[dm]} = \frac{\rho_0(1 + Y_1 + Y_2)}{a^3}. \quad (64)$$

Как и угадывалось из Ньютонова предела (30), плотность энергии тёмной материи перешкалируется вследствие Лоренц-нарушения. Таким образом, история расширения Вселенной в предложенной модели не отличима от предсказаний стандартной Λ CDM-космологии. Однако, как мы вскоре увидим, различия между двумя моделями проявляются на уровне космологических возмущений.

Заметим также, что G_{cosm} отличается от выражения для G_N , возникающего в Ньютоновом потенциале для точечного источника ([6, 7, 9])

$$G_N = \frac{1}{8\pi M_p^2(1 - c_1/2 - c_4/2)}.$$

4.3 Линеаризованные уравнения на фоне метрики Фридмана

Рассмотрим теперь линейные возмущения над рассмотренным в предыдущей подсекции однородным решением. Мы сосредоточимся только на скалярных возмущениях. Как было показано в секции (3), векторные возмущения затухают в Ньютоновом приближении так же, как и в стандартном случае, поэтому мы не ожидаем большого эффекта от них в космологии. Различия между общей Эйнштейн-эфир гравитацией и хронометрической теорией пропадают для скалярных возмущений, поэтому в дальнейшем мы будем использовать параметры α, β, λ вместо констант c_i . Действуем далее в конформном времени t и начнем с возмущений метрики в Ньютоновой калибровке

$$ds^2 = a(t)^2 [(1 + 2\phi)dt^2 - \delta_{ij}(1 - 2\psi)dx^i dx^j]. \quad (65)$$

Запишем скалярные возмущения эфира:

$$u_0 = a(1 + \phi), \quad u_i = a\partial_i\chi. \quad (66)$$

Определив тензор энергии-импульса стандартным образом,

$$T_{[i]\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{[i]}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (67)$$

запишем уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{M_p^2}(T_{[SM]\mu\nu} + T_{[ae]\mu\nu} + T_{[\varepsilon-dm]\mu\nu} + T_{[dm]\mu\nu}). \quad (68)$$

Для обычной барионной материи, излучения и космологической постоянной V_0 имеем стандартное гидродинамическое выражение

$$T_{[SM]\mu\nu} = (\rho_{[\gamma]} + p_{[\gamma]})v_{[\gamma]\mu}v_{[\gamma]\nu} - p_{[\gamma]}g_{\mu\nu} + (\rho_{[b]} + p_{[b]})v_{[b]\mu}v_{[b]\nu} + V_0 g_{\mu\nu}, \quad (69)$$

где $\rho_{[a]}$, $p_{[a]}$ плотность энергии и давление для различных компонент, а $v_{[a]\mu}$ их 4-скорости. В случае скалярных возмущений имеем

$$\rho_{[a]} = \bar{\rho}_{[a]}(t) + \delta\rho_{[a]}, \quad p_{[a]} = \bar{p}_{[a]}(t) + \delta p_{[a]}, \quad v_{[a]j} = \partial_j v_{[a]}.$$

Выражение для линеаризованного тензора энергии-импульса системы хронон-тёмная материя может быть найдено в Приложении (А). Сбрав вместе все рассмотренные вклады в (68), получим скалярную часть уравнений Эйнштейна:

$$2\Delta\psi - 3\mathcal{H}(2 + \alpha\mathcal{B})\dot{\psi} - \alpha\Delta\phi + \alpha\Delta\dot{\chi} + \alpha\mathcal{H}(1 - \mathcal{B})\Delta\chi - \frac{a^2}{M_p^2}(\delta\rho_{[b]} + \delta\rho_{[\gamma]} + \delta\rho_{[dm]} + 2\phi[\rho_{[\gamma]} + \rho_{[b]} + \rho_{[dm]} + V_0]) = 0, \quad (70a)$$

$$(2 + \alpha\mathcal{B})(\dot{\psi} + \mathcal{H}\phi) + \alpha c_\chi^2 \Delta\chi - \frac{\rho_{[b]}av_{[b]}}{M_p^2} - \frac{(\rho_{[\gamma]} + p_{[\gamma]})av_{[\gamma]}}{M_p^2} - \frac{\rho_{[dm]}a^2}{(1 + Y_1 + Y_2)M_p^2}[Y_1\chi + (1 + Y_2)\frac{v_{[dm]}}{a}] = 0, \quad (70b)$$

$$3(2 + \alpha\mathcal{B})[\ddot{\psi} + \mathcal{H}(\dot{\phi} + 2\dot{\psi}) + (2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\phi] + 2\Delta\phi - 2\Delta\psi + \alpha\mathcal{B}(\Delta\dot{\chi} + 2\mathcal{H}\Delta\chi) - \frac{3a^2\delta p_{[\gamma]}}{M_p^2} = 0, \quad (70c)$$

$$\phi - \psi - \beta(\dot{\chi} + 2\mathcal{H}\chi) = 0, \quad (70d)$$

где мы определили

$$\mathcal{B} \equiv \frac{\beta + 3\lambda}{\alpha}, \quad \mathcal{H} \equiv \frac{\dot{a}}{a} = aH, \quad c_\chi^2 \equiv \frac{\beta + \lambda}{\alpha}. \quad (71)$$

Уравнение движения эфира-хронона (145):

$$\ddot{\chi} + 2\mathcal{H}\dot{\chi} - \frac{\beta + \lambda}{\alpha}\Delta\chi + \left[\dot{\mathcal{H}}(1 - \mathcal{B}) + \mathcal{H}^2(1 + \mathcal{B}) + \frac{a^2\rho_{[dm]}Y_1}{\alpha M_p^2(1 + Y_1 + Y_2)} \right] \chi - \frac{a\rho_{[dm]}Y_1}{\alpha M_p^2(1 + Y_1 + Y_2)}v_{[dm]} = \dot{\phi} + \mathcal{H}(1 + \mathcal{B})\phi + \mathcal{B}\dot{\psi}. \quad (72)$$

Уравнение движения тёмной материи (146),

$$\frac{\dot{v}_{[dm]}}{a} + \frac{Y_1}{1 + Y_2}(\dot{\chi} + \mathcal{H}\chi) - \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2}\phi = 0, \quad (73)$$

имеет общее решение вида

$$v_{[dm]} = -\frac{Y_1}{1 + Y_2}a\chi + \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2} \int dt a \phi. \quad (74)$$

Ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса для обычной материи и излучения:

$$\delta\dot{\rho}_{[a]} + 3\mathcal{H}(\delta\rho_{[a]} + \delta p_{[a]}) - (\bar{p}_{[a]} + \bar{\rho}_{[a]})\left(\frac{\Delta v_{[a]}}{a} + 3\dot{\psi}\right) = 0, \quad (75)$$

$$\dot{v}_{[a]} + 3\mathcal{H}v_{[a]} + \frac{\dot{\bar{p}}_{[a]} + \dot{\bar{\rho}}_{[a]}}{\bar{p}_{[a]} + \bar{\rho}_{[a]}}v_{[a]} - \frac{a\delta p_{[a]}}{\bar{p}_{[a]} + \bar{\rho}_{[a]}} - a\phi = 0. \quad (76)$$

Выписанные в этой подсекции уравнения определяют эволюцию линейных возмущений в ранней Вселенной. Несмотря на то, что уравнения линейны, аналитически получить их общее решение невозможно, поэтому в следующей главе мы найдем приближенные решения для некоторых важных частных случаев, а затем исследуем систему численно.

5 Космологические возмущения: качественный анализ

Начнем с качественного анализа эволюции космологических возмущений на радиационной и материальной стадиях. Будем следовать методу, основанному на теории возмущений ([3]): рассмотрим сначала уравнения в нулевом порядке по константам α , β и λ (т.е. пренебрежем ими). Как обсуждалось в секции (2), ограничения на эти константы предполагают, что они малы. Однако, мы не имеем ограничений на константы Y_1 и Y_2 *a priori*. В рассматриваемом нулевом приближении $u^\mu = v^\mu$, что ведет к $\chi = v_{[dm]}/a$ (см (72),(133),(135)). Таким образом, возмущенные уравнения для гравитационных потенциалов и скорости тёмной материи сводятся к стандартным. Другими словами, в отсутствие констант α , β , λ наша модель идентична Λ CDM. Следовательно, предполагая адиабатические начальные условия, мы получаем, что в нулевом порядке по параметрам (α, β, λ) скорость $v_{[dm]}$ и гравитационные потенциалы есть обычная адиабатическая мода. На первом шаге теории возмущений мы подставляем выражения для ϕ, ψ из нулевого приближения (адиабатическая мода) в уравнения (72), (73) как источники полей $\chi, v_{[dm]}$. На втором шаге мы используем найденные в первом приближении выражения $\chi, v_{[dm]}$ как источники поправок к гравитационным потенциалам.

Для дальнейшего удобства нормируем $a(t_0) = 1$, где t_0 –современное конформное время, и используем выражение

$$\frac{\rho_{[dm]}}{M_c^2} = \frac{3H_0^2 \Omega_{dm}}{a^3},$$

где гравитационная постоянная модифицируется вследствие Лоренц–нарушения $M_c^2 = M_p^2 (1 + \beta/2 + 3\lambda/2)$. Кроме того, введем масштаб импульсов

$$k_Y^2 \equiv \frac{3H_0^2 \Omega_{dm} Y_1 M_c^2}{(\beta + \lambda)(1 + Y_2) M_p^2}, \quad (77)$$

который будет играть важную роль в дальнейшем рассмотрении и фигурировать в уравнении движения (72). Для значений параметров, которыми мы интересуемся в работе, масштаб k_Y/\sqrt{a} всегда находится под горизонтом.

5.1 Различные режимы эволюции

В зависимости от соотношений между импульсом моды k и другими масштабами в уравнениях для линейных возмущений, можно выделить шесть различных режимов эволюции мод (см Рис. 1):

- (a') моды за горизонтом, $k < \mathcal{H}$, радиационно-доминированная стадия,
- (a) моды за горизонтом, $k < \mathcal{H}$, материально-доминированная стадия,
- (b) моды под горизонтом, $k^2 > |k_Y|^2/a > \mathcal{H}^2$, радиационно-доминированная стадия,
- (b') моды под горизонтом, $|k_Y|^2/a > k^2 > \mathcal{H}^2$, радиационно-доминированная стадия,
- (c) моды под горизонтом, $k^2 > |k_Y|^2/a > \mathcal{H}^2$, материально-доминированная стадия,
- (c') моды под горизонтом, $|k_Y|^2/a > k^2 > \mathcal{H}^2$, материально-доминированная стадия.

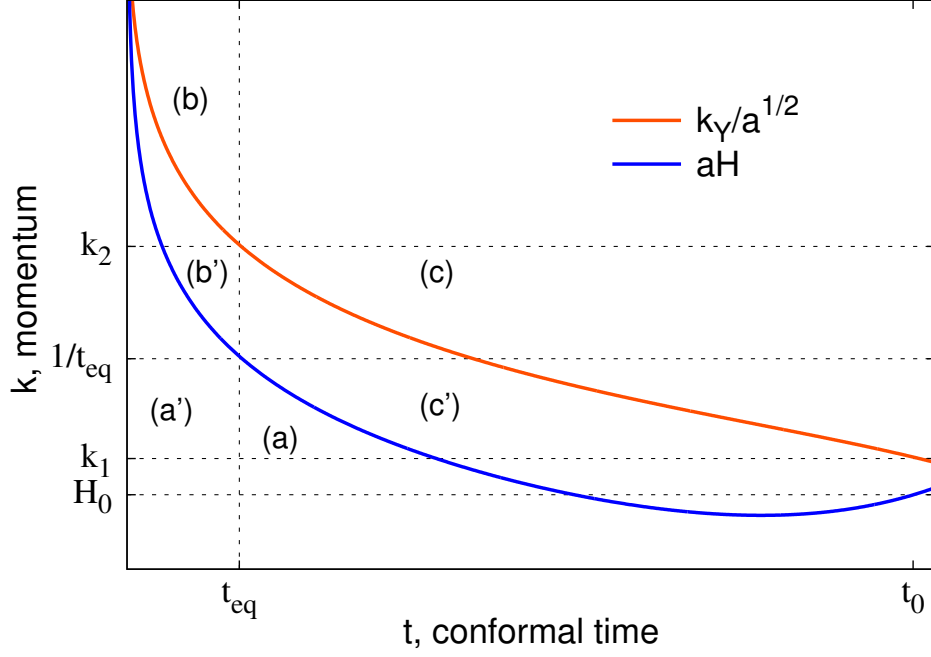


Рис. 1: Временная зависимость физических масштабов, определяющих динамику космологических возмущений: $\mathcal{H} = aH$ (синяя линия), $k_Y/\sqrt{a(t)}$ (оранжевая линия). Эволюция происходит различным образом в областях (a'), (a), (b), (b'), (c), (c'). Время РД-МД перехода обозначено за t_{eq} ; t_0 -настоящее время, H_0 - текущий параметр Хаббла, $k_1 = k_Y$ и $k_2 \equiv k_Y/\sqrt{a(t_{eq})}$. Масштабный фактор $a(t_0)$ нормирован на 1. Начало современного ускоренного расширения происходит там, где aH начинает расти.

Режим (a'): $k < \mathcal{H}$ на радиационно-доминированной стадии

Рассматривая моды под горизонтом, пренебрежем членами с операторами Лапласа и положим $\phi_\gamma = const$. На радиационно-доминированной стадии масштабный фактор линейно растет с конформным временем ($\Omega_\gamma \sim 10^{-5}$):

$$a(t) = A_\gamma t, \quad A_\gamma = \sqrt{\Omega_\gamma} H_0. \quad (78)$$

Предполагаем, что начальная скорость тёмной материи (постоянная интегрирования в (74)) равна нулю. Уравнения (72), (74) дают в этом случае

$$\ddot{\chi} + 2\frac{\dot{\chi}}{t} + \left[\frac{2\mathcal{B}}{t^2} + \frac{c_\chi^2 k_Y^2}{A_\gamma t} \right] \chi = \left[\frac{(1 + \mathcal{B})}{t} + \frac{c_\chi^2 k_Y^2}{2A_\gamma t} \right] \phi_\gamma, \quad (79)$$

Уравнение имеет адиабатическое решение

$$v_{[dm]} = \frac{A_\gamma \phi_\gamma}{2} t^2, \quad \chi = \frac{\phi_\gamma}{2} t. \quad (80)$$

Обе жидкости (эфир и тёмная материя) движутся совместно, эфир находится в режиме экранировки и никаких новых эффектов не возникает. Чтобы установить, является ли

это решение аттрактором динамики, рассмотрим однородное уравнение (79), т.е. уравнение в отсутствие внешних источников (потенциалов). Однородное решение находится в терминах функций Бесселя ($\chi_{\gamma,i}$ -постоянные интегрирования)

$$\chi_{hom}(t) = \chi_{\gamma,1} \mathbf{J}_{\sqrt{1-8\mathcal{B}}} \left(2 \frac{c_\chi k_Y \sqrt{t}}{\sqrt{A_\gamma}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + \chi_{\gamma,2} \mathbf{Y}_{\sqrt{1-8\mathcal{B}}} \left(2 \frac{c_\chi k_Y \sqrt{t}}{\sqrt{A_\gamma}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (81)$$

Найденное однородное решение имеет качественно различное поведение в случаях

$$Y_1/(1+Y_2) > 0 \quad (82)$$

и $Y_1/(1+Y_2) < 0$. В первом случае k_Y , определенное в (77), действительно, и решение осциллирует, затухая по сравнению с адиабатической модой на поздних временах. Однако, во втором случае k_Y чисто мнимое и имеется растущая мода, которая начинает доминировать над адиабатической с момента времени $t \sim A_\gamma/|k_Y|^2$. Это решение драматически меняет стандартный Λ CDM сценарий даже в случае малых Y_1, Y_2 . Из действия для возмущений эфира в Ньютоновом пределе (16) видно, что выражение $(1+Y_2)$ определяет знак перед кинетическим членом, а величина Y_1 —перед квадратом эффективной массы эфира. Поэтому $Y_1/(1+Y_2) < 0$ соответствует либо "духовой", либо "тахсионной" неустойчивости эфира. В дальнейшей работе мы будем изучать только устойчивый случай.

Предполагая 82, обратимся к ранним временам,

$$t \ll \frac{A_\gamma}{c_\chi^2 k_Y^2}. \quad (83)$$

Однородные решения имеют степенную асимптотику,

$$\chi \propto t^{q_\pm}, \quad \text{где} \quad q_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8\mathcal{B}}}{2}. \quad (84)$$

Мода с q_- всегда затухает, тем временем как мода с q_+ растет быстрее адиабатической (80), если $\mathcal{B} < -1$. Видно, что этот эффект не зависит от взаимодействия эфира с тёмной материей и соответствует внутренней неустойчивости эфира. Хотя этот случай может представлять определенный интерес, в данной работе мы для определенности сконцентрируемся на $\mathcal{B} > -1$. В этом случае все свободные решения подавлены по сравнению с адиабатической модой.

Режим (a): $k < \mathcal{H}$ на материально-доминированной стадии

На материально-доминированной стадии масштабный фактор растет как $a(t) = A_{cm} t^2$, где $A_{cm} = \Omega_{cm} H_0^2/4$,

$$\Omega_{cm} = \Omega_{dm} + \Omega_b,$$

Ω_b —современный вклад барионов в плотность энергии Вселенной. После пренебрежения членами с Лапласианами, получаем из уравнений (72),(74):

$$\ddot{\chi} + 4 \frac{\dot{\chi}}{t} + \left[\frac{2(1+3\mathcal{B})}{t^2} + \frac{c_\chi^2 k_Y^2}{A_{cm} t^2} \right] \chi = \left[\frac{2(1+\mathcal{B})}{t} + \frac{c_\chi^2 k_Y^2}{3A_{cm} t^2} \right] \phi_{cm}. \quad (85)$$

Здесь мы также пренебрегли начальной скоростью (константой интегрирования в (74)) по сравнению с растущей адиабатической модой, которая снова является решением и имеет вид

$$v_{[dm]} = \frac{A_{cm}\phi_{cm}}{3}t^3, \quad \chi = \frac{\phi_{cm}}{3}t. \quad (86)$$

Так же как и в предыдущем случае, рассмотрим однородные уравнения для изучения устойчивости адиабатического решения. Подставив $\phi_{cm} = 0$ в уравнения (85), находим степенные решения

$$\chi = \chi_{cm\pm}t^{r_{\pm}}, \quad (87)$$

где $\chi_{cm\pm}$ -постоянные интегрирования и

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-3 \pm \sqrt{1 - 24\mathcal{B} - \frac{4c_{\chi}^2 k_Y^2}{A_{cm}}} \right]. \quad (88)$$

Для интересующих нас значений параметров Лоренц-нарушения однородное решение описывает осциллирующие моды с падающей амплитудой. Также заметим, что и в этом режиме для отсутствия драматически растущих возмущений необходимо выполнение условия (82).

Режимы (b), (b'): $k > \mathcal{H}$ на радиационно-доминированной стадии

Рассмотрим подгоризонтные моды на стадии доминирования излучения. В рамках предложенной выше теории возмущений, гравитационные потенциалы быстро затухают и мы пренебрежем ими, как и членами, пропорциональными параметру Хаббла. Тогда используя уравнение (74), имеем

$$\ddot{\chi} + 2\frac{\dot{\chi}}{t} + c_{\chi}^2 \left(k^2 + \frac{k_Y^2}{A_{\gamma}t} + 2\frac{\mathcal{B}}{c_{\chi}^2 t^2} \right) \chi - \frac{c_{\chi}^2 k_Y^2 C}{A_{\gamma}^2 t^2} = 0, \quad (89)$$

где $C = v_0(1 + Y_1)/(1 + Y_1 + Y_2)$, v_0 -скорость в момент захода моды под горизонт. В случае

$$\frac{\mathcal{B}}{c_{\chi}^2 t^2} \ll k^2 \ll \frac{k_Y^2}{A_{\gamma}t},$$

данное уравнение имеет решение ($\chi_{rad,i}$ -константы интегрирования):

$$\chi(t) = \chi_{rad,1} \mathbf{J}_1 \left(2 \frac{c_{\chi} k_Y \sqrt{t}}{\sqrt{A_{\gamma}}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + \chi_{rad,2} \mathbf{Y}_1 \left(2 \frac{c_{\chi} k_Y \sqrt{t}}{\sqrt{A_{\gamma}}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{C}{A_{\gamma}t}. \quad (90)$$

Подставляя это в (74), получаем, что скорость содержит постоянную и осциллирующую часть (θ -фаза и v_1 -постоянная интегрирования):

$$v_{[dm]} = v_0 + v_1 \sin \left(2 \frac{c_{\chi} k_Y \sqrt{t}}{\sqrt{A_{\gamma}}} + \theta \right). \quad (91)$$

Возмущения плотности содержат логарифмически растущий вклад, как в Λ CDM-модели, на который накладываются затухающие осцилляции:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta\rho_{[dm]}}{\rho_{[dm]}} \right) + k^2 \frac{v_{[dm]}}{A_{\gamma}t} - 3\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \frac{\delta\rho_{[dm]}}{\rho_{[dm]}} \propto \log(t) + (\text{затух. осцилляции}). \quad (92)$$

Мы убедимся в секции (6), что эффект осцилляций весьма слаб для натурального набора параметров модели.

В случае

$$k^2 \gg \frac{k_Y^2}{A_\gamma t},$$

можно получить следующее решение:

$$\chi(t) = \chi_{rad,3} \frac{\sin(c_\chi kt)}{c_\chi kt} + \chi_{rad,4} \frac{\cos(c_\chi kt)}{c_\chi kt} + \frac{c_\chi k_Y^2 C (\mathbf{Ci}(c_\chi kt) \sin(c_\chi kt) - \mathbf{Si}(c_\chi kt) \cos(c_\chi kt))}{A_\gamma^2 kt}, \quad (93)$$

где специальные функции

$$\mathbf{Si} \equiv \int_0^x dx_1 \frac{\sin(x_1)}{x_1}, \quad \mathbf{Ci} \equiv \gamma + \ln(x) + \int_0^x dx_1 \frac{\cos(x_1) - 1}{x_1}.$$

Это означает, что скорость содержит однородные осцилляции около постоянного значения и осцилляции с затухающей амплитудой (неоднородная часть). Контраст плотности также колеблется с падающей амплитудой "вокруг" логарифмически растущего вклада. Численное интегрирование (см (6)) показывает, что при начальных адиабатических условиях эффект осцилляций весьма слаб для всех естественных значений параметров модели. В первую очередь это объясняется малой продолжительностью РД стадии и, в особенности, рассматриваемого подрежима.

Режимы (c), (c'): $k > \mathcal{H}$ на материально-доминированной стадии

Рассмотрим эволюцию мод под горизонтом на материально-доминированной стадии. В нулевом приближении на этой стадии гравитационные потенциалы постоянны и мы подставляем их в (72), (73) как источники полей χ , $v_{[dm]}$. Используя (74) и пренебрегая членами порядка \mathcal{H} , получим:

$$\ddot{\chi} + 4\frac{\dot{\chi}}{t} + c_\chi^2 \left[k^2 + \frac{k_Y^2}{A_{cm} t^2} \right] \chi - \frac{c_\chi^2 k_Y^2 C}{A_{cm}^2 t^4} = \left(2(1 + \mathcal{B}) + \frac{k_Y^2 c_\chi^2}{3A_{cm}} \right) \frac{\phi_{cm}}{t}, \quad (94)$$

Начальная скорость (C , константа интегрирования в (74)) пренебрежимо мала по сравнению с растущей адиабатической модой. Снова видим, что возникает два подрежима. В первом случае,

$$k^2 \ll \frac{k_Y^2}{A_{cm} t^2}, \quad (95)$$

получаем частное решение

$$\chi = \left[\frac{6A_{cm}(1 + \mathcal{B}) + c_\chi^2 k_Y^2}{12A_{cm} + 3c_\chi^2 k_Y^2} \right] \phi_{cm} t \approx \frac{\phi_{cm} t}{3}, \quad v_{[dm]} \approx \frac{A_{cm} \phi_{cm} t^3}{3}. \quad (96)$$

Помимо этого решения также присутствует неинтересная нам затухающая мода с осцилляциями (однородное решение). Таким образом, в случае $\alpha \ll Y_i$ мы получили лишь поправку к стандартному адиабатическому решению. Поэтому в главном порядке контраст плотности растет как масштабный фактор:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta \rho_{[dm]}}{\rho_{[dm]}} \right) + k^2 \frac{v_{[dm]}}{A_{cm} t^2} - 3\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \frac{\delta \rho_{[dm]}}{\rho_{[dm]}} \propto t^2. \quad (97)$$

Вычислим теперь поправки к гравитационным потенциалам. Подставляя (96) в уравнения Эйнштейна (70с), (70d) находим в главном порядке по параметрам Лоренц-нарушения:

$$\psi = \phi_{cm} \left(1 + \frac{5}{84}(\beta + \lambda)k^2 t^2 \right), \quad \phi = \phi_{cm} \left(1 + \frac{5\beta}{3} + \frac{5}{84}(\beta + \lambda)k^2 t^2 \right). \quad (98)$$

Мы видим, что несмотря на то, что поправки к потенциалам малы, они растут со временем. В частности, когда k_Y^2/a "краснеет" до значения k^2 , выводящему нас из рассматриваемого режима, мы получаем эффект порядка $O(Y)$:

$$\psi \approx \phi = \phi_{cm} \left(1 + \frac{5Y_1 \Omega_{dm}}{7(1 + Y_1 + Y_2)\Omega_{cm}} \right), \quad (99)$$

где мы пренебрегли поправками порядка $O(\beta)$. Отметим, что знак перед поправкой должен быть положителен для выполнения критерия устойчивости: Лоренц-нарушение в тёмной материи ведет к усилению гравитационного потенциала в этом режиме.

Обратимся теперь к модам с большими импульсами,

$$k^2 \gg \frac{k_Y^2}{A_{cm} t^2}. \quad (100)$$

Решение, полученное с помощью теории возмущений, имеет вид:

$$v_{[dm]} = \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2} \frac{A_{cm} \phi_{cm}}{3} t^3, \quad \chi = \left[\frac{2(1 + \mathcal{B})}{c_\chi^2} + \frac{k_Y^2(1 + Y_1 + Y_2)}{3A_{cm}(1 + Y_2)} \right] \frac{\phi_{cm}}{k^2 t}. \quad (101)$$

Оценим величину обратной реакции такого решения на гравитационные потенциалы. Подставляя (101) в уравнения (70с), (70d), получим в лидирующем порядке по параметрам эфира:

$$\psi \approx \phi = \phi_{cm} + \phi^{(1)} t^{\varkappa/2}, \quad (102)$$

где

$$\frac{\varkappa}{2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 6 \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_{cm}} \frac{Y_1}{1 + Y_2}} - \frac{5}{2}.$$

Поскольку мы всё еще не имеем никаких ограничений на параметры Y_i , то последняя поправка может быть не мала. Кроме того, она растет со временем. Поэтому обратная реакция на гравитационные потенциалы оказывается значительной и это не позволяет нам использовать дальше теорию возмущений.

Непертурбативная схема: $k > k_Y/\sqrt{a}$ на материально-доминированной стадии

Отвергнув теорию возмущений, мы должны самосогласованно решить систему линеаризованных уравнений (70с), (70d), (72), (73) в случае $k > k_Y/\sqrt{a}$. Используя степенной анзац для всех неизвестных функций, получаем частное решение:

$$v_{[dm]} = \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2} \frac{A_{cm} \phi_1}{a_\pm} t^{a_\pm}, \quad (103)$$

$$\chi = \left[\frac{12Y_1 \Omega_{dm}}{a_\pm(1 + Y_2)\Omega_{cm}} + \alpha(a_\pm - 1)(1 + \mathcal{B}) \right] \frac{\phi_1}{(\beta + \lambda)k^2} t^{a_\pm - 4}, \quad (104)$$

$$\psi = \phi = \phi_1 t^{a_\pm - 3}, \quad (105)$$

где в главном порядке по α, β и λ

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{25 + 24 \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_{cm}} \frac{Y_1}{1 + Y_2}} \right]. \quad (106)$$

Легко проверить, что такой анзац "проходит" через оставшиеся уравнения (70a), (70b). Мода с a_- всегда затухает, в отличие от моды с a_+ . Контраст плотности растет в этом случае как

$$\frac{\delta\rho_{[dm]}}{\rho_{[dm]}} \propto t^{a_+-1}. \quad (107)$$

Как и ожидалось, это решение находится в согласии с найденным в Ньютоновском пределе (51) для $\Omega_{cm} = \Omega_{dm}$. Мы видим, что поведение растущей моды может существенно отличаться от Λ CDM (которая может быть получена из (106) в пределе $Y_1 = Y_2 = 0$). Найденное поведение аналогично изменению степенного роста возмущений тёмной материи, возникающему в Лоренц-инвариантных моделях, в которых в секторе тёмной материи нарушается принцип эквивалентности за счет дополнительных дальнедействующих сил ([17]). Константа ϕ_1 определяется из "склейки" решений в момент, когда мода пересекает "горизонт экранировки" ($k_Y/\sqrt{a} = k$) и вступает в рассматриваемый подрежим эволюции.

Как обсуждалось выше, физика подобного эффекта весьма наглядна. Пока мы имеем дело с длинноволновыми возмущениями (которым соответствуют объекты больших масс), эфир находится в режиме экранировки и данные моды эволюционируют стандартным образом. Короткие же моды соответствуют возмущениям с малой Джинсовской длиной волны и, следовательно, малой массой. Поэтому экранировки не происходит и возникает эффективное усиление гравитации вследствие эффектов эфира.

5.2 Спектр мощности возмущений

Обсудим теперь качественно, какие изменения возникнут в спектре мощности возмущений благодаря эффектам, найденным в предыдущих подсекциях. При этом анализе мы пренебрежем "подавлением", связанным с присутствием космологической постоянной и взаимодействием между излучением и барионами.

Напомним, что загоризонтные моды эволюционируют так же, как в Λ CDM - модели. Рассмотрим сперва моды, заходящие под горизонт на материально-доминированной стадии:

а) Моды с импульсами из интервала

$$H_0 < k < \frac{k_Y}{\sqrt{a(t_0)}} = k_Y$$

эволюционируют в режиме (95). Ранее мы показали, что в первом порядке по теории возмущений моды растут так же, как в Λ CDM-случае, с поправками к гравитационным

потенциалам величины (98). Поэтому, для большинства мод из этого интервала мы ожидаем стандартный вид спектра мощности с усилением порядка $O(Y)$ для мод, близких к верхней границе интервала. Моды из этого интервала не успевают зайти под горизонт экранировки, следовательно, в ведущем порядке по (α, β, λ) контраст плотности дается стандартным выражением

$$\delta_{[dm]}(t) = -\frac{1}{6}(kt)^2 \phi_{cm,i},$$

где постоянный потенциал испытывает скачек $\phi_{cm,i} = (9/10)\phi_i$ и остается постоянным для адиабатической моды за горизонтом. Поэтому спектр мощности потенциалов и контраста плотности в настоящий момент времени t_0 имеет обычную зависимость от импульсов:

$$P_\phi(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \left(\frac{9}{10}\right)^2 \mathcal{P}_{\phi,i}(k), \quad P_\delta(k) = \frac{9\pi^2}{200} t_0^4 k \mathcal{P}_{\phi,i}(k), \quad (108)$$

где P_δ как обычно, определяется из двухточечной корреляционной функции

$$\langle \delta(\mathbf{k}, t_0), \delta(\mathbf{k}', t_0) \rangle = \frac{P(k)}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

и аналогично для P_ϕ . Спектры мощности гравитационного потенциала и контраста плотностей связаны между собой соотношением $P_\phi \propto P_\delta / (kt_0)^4$, поэтому для качественного описания зависимости от импульсов мы будем изучать только спектр P_δ . Величина $\mathcal{P}_{\phi,i}$ есть первичный спектр мощности возмущений, который предполагается плоским.

б) Моды из интервала

$$k_Y < k < \frac{1}{t_{eq}},$$

где t_{eq} —время РД-МД перехода, после захода под горизонт частиц ($k = \mathcal{H}$) эволюционируют стандартным образом, после чего заходят под горизонт экранировки, и растут в режиме (103)-(105)

$$\delta_{[dm]}(t) = -\frac{(1 + Y_1 + Y_2)(kt)^2}{(1 + Y_2)a_+(a_+ - 1)} \phi(t). \quad (109)$$

Сшивая $\delta_{[dm]}$ и ϕ в момент времени t_Y , когда k пересекает горизонт экранировки k_Y / \sqrt{a} (определяемый как $k_Y^2 = a(t_Y)k^2$), получаем:

$$\delta_{[dm]} = -\frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2} \frac{\phi_{cm,i}}{a_+(a_+ - 1)} \left[\frac{(\beta + \lambda)(1 + Y_2)\Omega_{cm}}{12Y_1\Omega_{dm}} \right]^{\frac{a_+ - 3}{2}} (kt)^{a_+ - 1}. \quad (110)$$

Таким образом, мы ожидаем для современных спектров мощности изменение степенной зависимости от импульса на рассматриваемом интервале

$$P_\phi \propto k^{2a_+ - 9} t_0^{2a_+ - 6} \mathcal{P}_{\phi,i}, \quad P_\delta \propto k^{2a_+ - 5} t_0^{2a_+ - 2} \mathcal{P}_{\phi,i}. \quad (111)$$

Теперь обратимся к модам, заходящим под горизонт на радиационно-доминированной стадии.

в) Для мод в диапазоне

$$\frac{1}{t_{eq}} < k < \frac{k_Y}{\sqrt{a(t_{eq})}}$$

контраст плотности на радиационно-доминированной стадии имеет стандартный вид [18] (см также (92)),

$$\delta_{[dm]} = B\phi_i \log(0.2kt),$$

где $B = O(10)$, - численная постоянная. После $t = t_{eq}$, мода растет как в стандартном Λ CDM случае,

$$\delta_{[dm]} = C\phi_i \left(\frac{t}{t_{eq}}\right)^2 \log(0.2kt_{eq}),$$

где постоянная $C \sim O(0.1)$. После того, как мода заходит под горизонт "экранировки" мы сшиваем контрасты плотности и получаем

$$\delta_{[dm]}(t) \sim k^{a+3} t^{a+1} \log(0.2kt_{eq}).$$

В итоге, спектры мощности:

$$P_\phi \propto k^{2a+13} t_0^{2a+6} \log(0.2kt_{eq}) \mathcal{P}_{\phi,i}, \quad P_\delta \propto k^{2a+9} t_0^{2a+2} \log(0.2kt_{eq}) \mathcal{P}_{\phi,i} \quad (112)$$

г) Моды с импульсами

$$k > \frac{k_Y}{\sqrt{a(t_{eq})}}$$

испытывают осцилляции на радиационно-доминированной стадии и сразу после момента t_{eq} попадают в режим (107). Наш численный анализ, проведенный в секции (6) показывает, что эффект этих осцилляций весьма мал и мы пренебрежем ими. После "сшивки" этих режимов получаем

$$\delta_{[dm]}(t) \sim \phi_i \left(\frac{t}{t_{eq}}\right)^{a+1},$$

что в ведет к стандартной зависимости от импульса спектров мощности

$$P_\phi \propto k^{-7} t_0^{2a+6} \mathcal{P}_{\phi,i}, \quad P_\delta \propto k^{-3} t_0^{2a+2} \mathcal{P}_{\phi,i}. \quad (113)$$

Отметим однако, что спектр мощности будет усилен по сравнению со стандартным случаем фактором $(t_0/t_{eq})^{2a+6}$.

Итак, мы получили что для интервала импульсов $k_1 < k < k_2$ спектр мощности будет иметь зависимость от импульсов, усиленную на k^\varkappa , где

$$k_1 = H_0 \sqrt{\frac{3Y_1 \Omega_{dm}}{(\beta + \lambda)(1 + Y_2)}}, \quad k_2 = \frac{1}{t_{eq}} \sqrt{\frac{12Y_1 \Omega_{dm}}{(\beta + \lambda)(1 + Y_2) \Omega_{cm}}}, \quad (114)$$

$$\varkappa = \sqrt{25 + 24 \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_{cm}} \frac{Y_1}{1 + Y_2}} - 5. \quad (115)$$

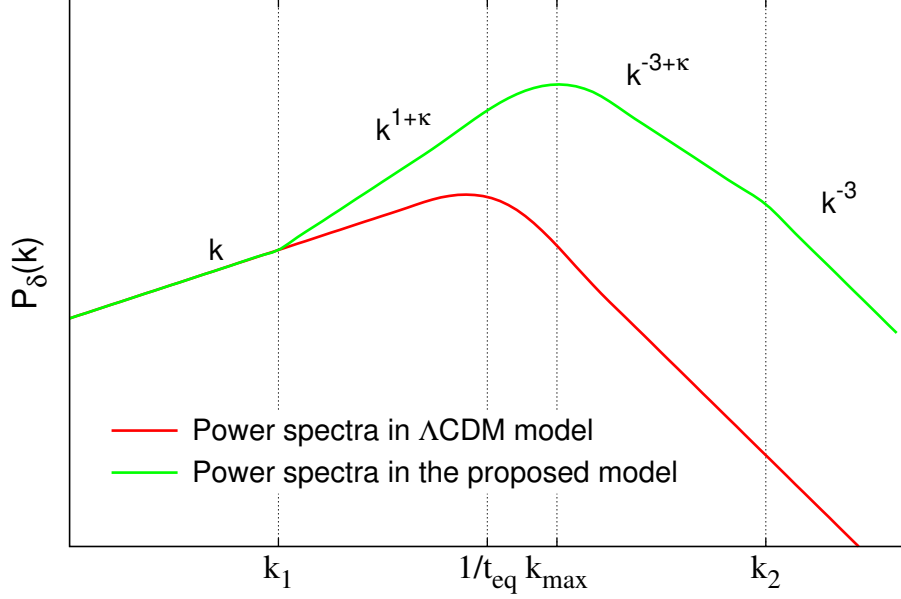


Рис. 2: Качественный вид спектра мощности. Параметры на графике определены в (114) и принято $k_{max,0} = 1/t_{eq}$.

Отметим, что это приведет к смещению максимума спектра мощности. Действительно, в логарифмических осях стандартный спектр мощности $P_\delta^{(0)}$ вблизи максимума представляет собой параболу. Усиленный спектр мощности является суммой параболы и прямой:

$$P_\delta = P_\delta^{(0)} k^\varkappa \quad \Rightarrow \quad \ln P_\delta = \ln P_\delta^{(0)} + \varkappa \ln(k).$$

Следовательно, максимум k_{max} этой функции "парабола+прямая" сместится по сравнению с максимумом параболы $k_{max,0}$. Будем считать что смещение положения максимума $k_{max} - k_{max,0}$ мало. Тогда имеем после дифференцирования по k и разложения $\frac{d}{d \ln k} \ln P_\delta^{(0)}$ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln k} \ln(P_\delta) &= \frac{d}{d \ln k} \ln P_\delta^{(0)} \Big|_{k=k_{max}} + \varkappa = 0, \\ \frac{d}{d \ln k} \ln P_\delta^{(0)} &= \frac{d^2}{d \ln k^2} \ln P_\delta^{(0)} \Big|_{k=k_{max,0}} (\ln k_{max} - \ln k_{max,0}) + \mathcal{O} \ln \left(\frac{k_{max}}{k_{max,0}} \right)^2. \end{aligned}$$

Величина $\frac{d^2}{d \ln k^2} \ln P_\delta^{(0)} \Big|_{k=k_{max,0}} \equiv \ln P_0''$ порядка минус единицы, $O(-1)$, поэтому имеем для смещения максимума

$$\ln P_0'' \ln \frac{k_{max}}{k_{max,0}} + \varkappa = 0, \quad \frac{k_{max}}{k_{max,0}} \sim e^\varkappa \approx 1 + \varkappa. \quad (116)$$

Отметим, что если параметры модели выбраны так, что $k_1 > k_{max,0}$, то максимум спектра мощности не будет испытывать смещения и все эффекты Лоренц-нарушения начнут проявляться лишь на больших волновых числах. Результаты качественного анализа спектра мощности (усиление на больших импульсах и смещение положения максимума) изображены на Рис.2.

6 Космологические возмущения: численный анализ

В этой секции мы приводим описание результатов численного интегрирования полной системы линеаризованных уравнений для космологических возмущений. Мы рассматриваем относительные доли излучения, холодной материи, тёмной материи и тёмной энергии на настоящий момент:

$$\Omega_\gamma = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_{cm} = 0.25, \quad \Omega_{dm} = 0.2, \quad \Omega_\Lambda = 0.75.$$

Для простоты мы пренебрегаем всеми эффектами, связанными с взаимодействием барионов и излучения, а также включаем барионы в холодную (т.е. нерелятивистскую) материю. Также мы пренебрегаем наличием масс у нейтрино и включаем их в радиационную компоненту. Детали численной процедуры приведены в Приложении (B).

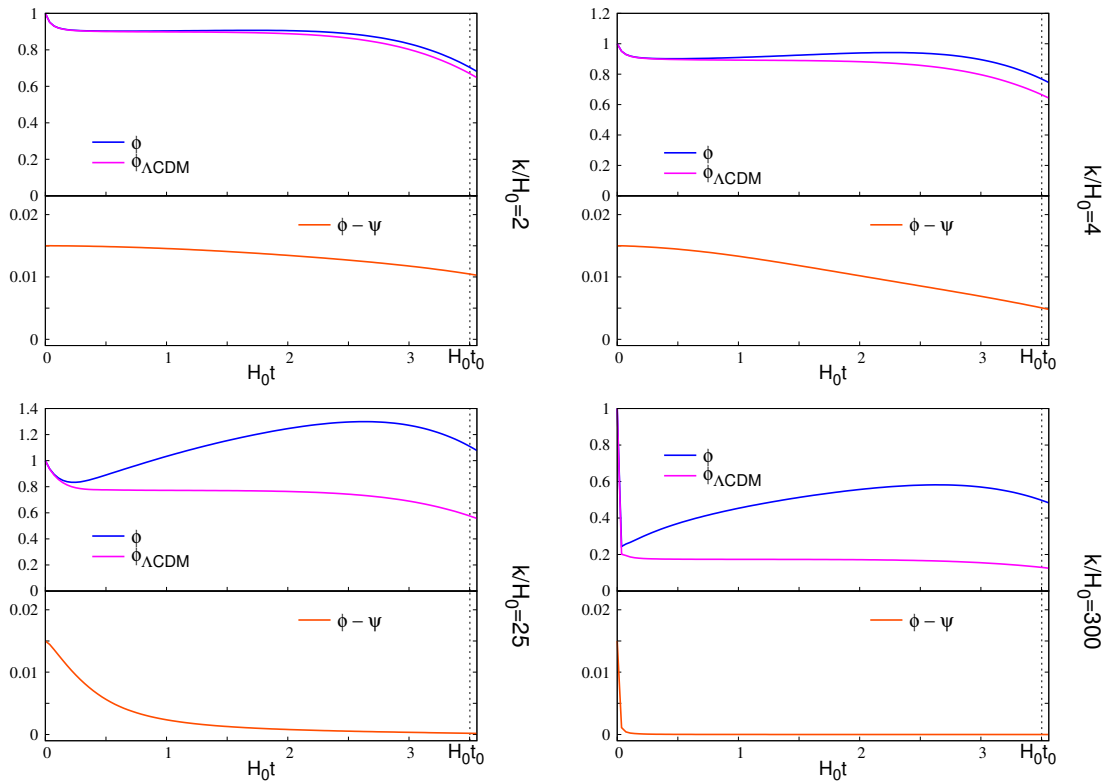


Рис. 3: Решения для четырех значений импульса: $k = 2H_0$ (левая верхняя панель), $k = 4H_0$ (правая верхняя панель), $k = 25H_0$ (левая нижняя панель) and $k = 300H_0$ (правая нижняя панель). H_0 - постоянная Хаббла. Панели показывают возмущения гравитационного потенциала ϕ и разницу $(\phi - \psi)$. Для сравнения приводятся гравитационные потенциалы в стандартной Λ CDM космологии. Параметры модели $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.01$, $\lambda = 0.01$, $Y_1 = 0.2$, $Y_2 = -0.2$. Для этих параметров $k_\gamma = 3.06H_0$. Современное время соответствует $t_0 = 3.5H_0^{-1}$.

Зависимость от времени гравитационных потенциалов и разницы $(\phi - \psi)$ показана на Рис.3 для нескольких значений импульсов. Параметры модели

$$\alpha = 0.02, \quad \beta = 0.01, \quad \lambda = 0.01, \quad Y_1 = 0.2, \quad Y_2 = -0.2.$$

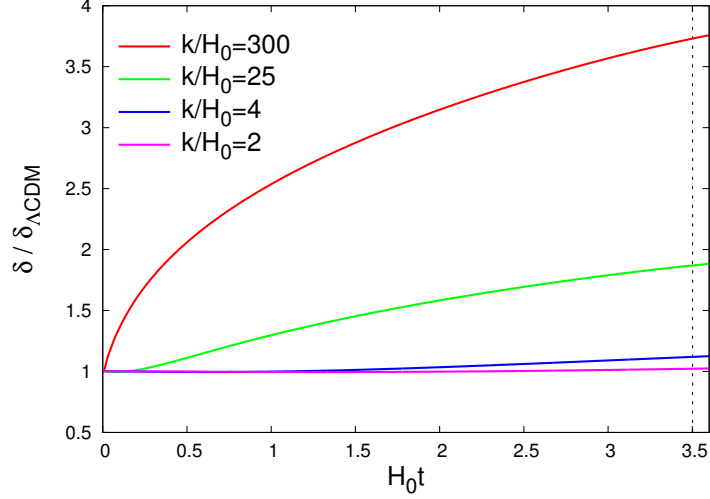


Рис. 4: Отношение контрастов плотности в предложенной модели и ΛCDM в зависимости от времени для нескольких мод k . Значения параметров такие же, как на Рис. 3.

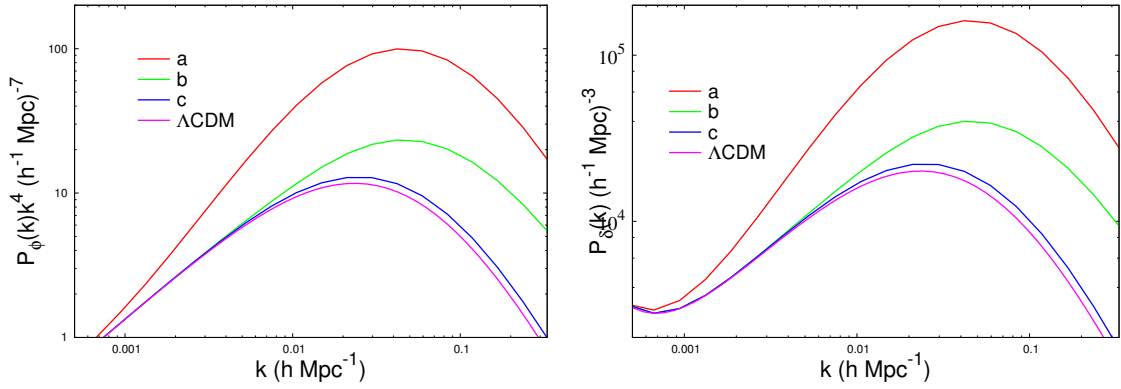


Рис. 5: Спектры мощности гравитационного потенциала (умноженный на k^4 , левая панель) и контраста плотности материи (правая панель) в рассмотренной модели и ΛCDM космологии. Кривые соответствуют параметрам, перечисленным в Таблице 6.

Данный выбор удовлетворяет PPN², VBN и ограничениям из излучения гравитационных волн ([7, 12]). Начальные условия соответствуют адиабатической моде и для наглядности, начальное значение ϕ нормировано на 1 для всех мод. Также мы приводим для сравнения Ньютонов потенциал в стандартном ΛCDM случае (где $\psi = \phi$).

	α	β	λ	Y_1	Y_2	k_Y ($h \text{Mpc}^{-1}$)
a	$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-1}$	$-2 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$
b	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-1}$	$-2 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^{-2}$
c	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-2}$	$-2 \cdot 10^{-2}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$

²Напомним, что случай $\alpha = 2\beta$ избегает ограничения из PPN.

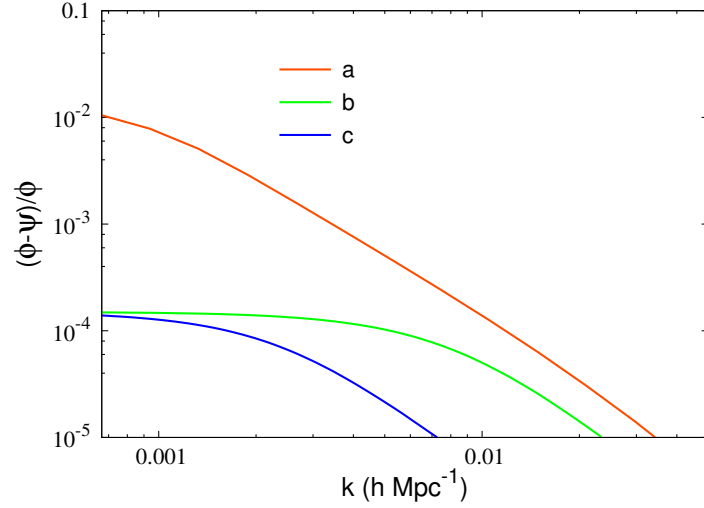


Рис. 6: Разница между гравитационными потенциалами для параметров модели, указанных в 6.

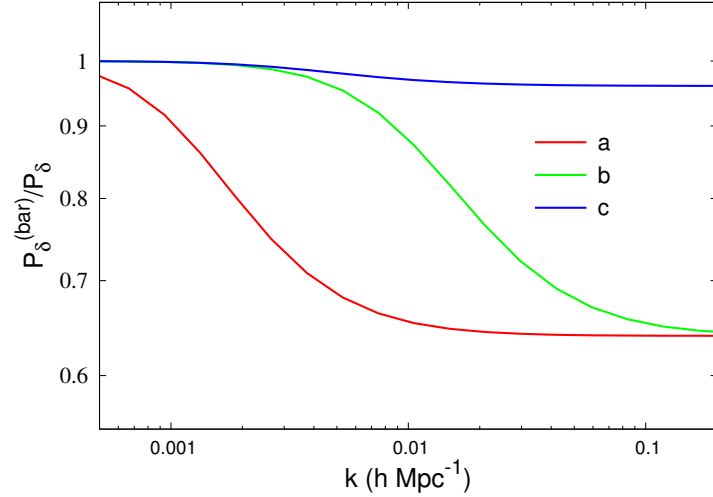


Рис. 7: Отношение спектров мощности возмущений в барионах и холодной материи для нескольких значений параметров, указанных в Таблице 6.

Мы видим, что возмущения гравитационных потенциалов усилены на поздних временах по сравнению с Λ CDM. С другой стороны, разница между потенциалами $(\phi - \psi)$, являющаяся изначально порядка 10^{-2} , быстро убывает на малых масштабах.

Можно ожидать, что усиление гравитационных возмущений приведет к увеличению темпа роста структур. Это проиллюстрировано на Рис 4, где изображено отношение $\delta/\delta_{\Lambda\text{CDM}}$, где δ и $\delta_{\Lambda\text{CDM}}$ – контрасты плотности в исследуемой модели и ΛCDM соответственно. Как и предполагалось, эффект усиления роста структур сильнее для коротких мод и может быть очень велик для нашего выбора параметров. Поэтому строим далее спектры мощности возмущений в предложенной модели и ΛCDM в настоящее время. На Рис. 5 показан спектр мощности потенциала ϕ , умноженный на k^4 для наглядности и

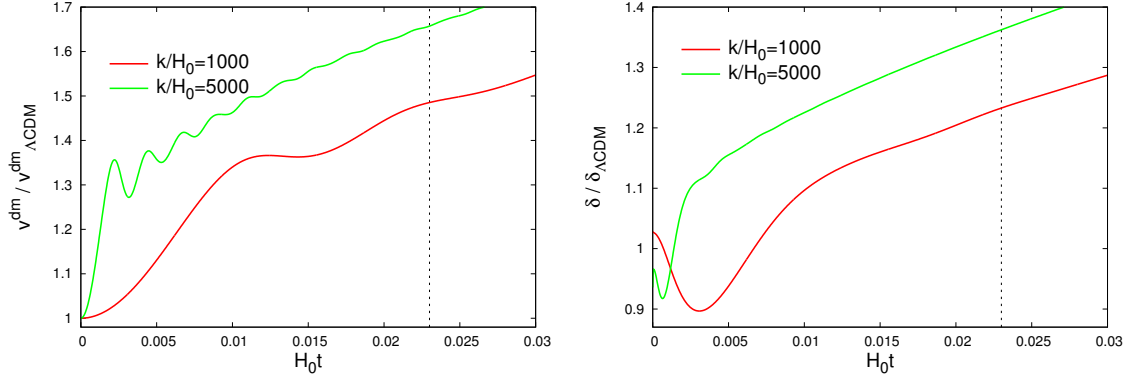


Рис. 8: Отношение скоростей (левая панель) и контрастов плотности (правая панель) в рассмотренной модели к Λ CDM в зависимости от времени для некоторых мод с большими k . H_0 - постоянная Хаббла. Панели демонстрируют осцилляции скоростей и контрастов плотности. Провалы при малых временах на правой панели не связаны с осцилляциями и возникают из-за резкого изменения гравитационного потенциала, дающего большой вклад в $\dot{\psi}$ в (92) при заходе моды под горизонт. Параметры модели $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.01$, $\lambda = 0.01$, $Y_1 = 0.02$, $Y_2 = -0.02$. Для этих значений $k_Y = 0.78H_0$. Время РД-МД перехода $t_0 = 0.023H_0^{-1}$.

спектр мощности контраста плотности холодной материи δ . Спектры мощности посчитаны для нескольких параметров модели, приведенных в таблице 6. Также там указаны соответствующие значения импульса k_Y . Спектр мощности контраста плотности нормирован так же, как в работе ([19]). Как и ожидалось из результатов предыдущей секции, спектр мощности усилен на больших значениях импульсов и его максимум смещен в коротковолновую область. Значение сдвига зависит от Y_1, Y_2 , если $k_{max} > k_1$ (см (114)) и приближенно может быть описано формулой (116).

Затем, мы строим на Рис. 6 спектр относительной разности $(\phi - \psi)/\phi$ между двумя потенциалами. Различие практически пренебрежимо на масштабах k больше 0.01 Mpc^{-1} .

Рис. 7 показывает отношение между спектрами мощности контраста плотности для Лоренц-инвариантных барионов и холодной материи (барионы и Лоренц-нарушающая темная материя). Разность между спектрами мощности становится существенной начиная с масштаба k_1 (см (114)) и её абсолютная величина определяется параметрами Y_1, Y_2 .

Теперь рассмотрим осцилляции. Как было показано в подсекции (5.1), осцилляции испытывают только короткие моды с $k > k_Y/\sqrt{a}$ на радиационной стадии и их амплитуда пропорциональна k_Y (93). Поэтому осциллируют только короткие моды, которые уже должны были выйти на нелинейную стадию эволюции к настоящему времени. Численный анализ показывает, что осцилляции не оставляют ощутимых следов в спектре мощности для всех интересных значений параметров модели. Даже если эффект осцилляций заметен для скоростей, то он пренебрежимо мал для контраста плотности (см. Рис.8).

7 Заключение

В данной работе были исследованы следствия Лоренц-нарушения в секторе тёмной материи. Отклонение от Лоренцевой симметрии изучалось в рамках Эйнштейн-эфир гравитации и единичного векторного поля-эфира. Последний может быть рассмотрен как в общем случае, так и в виде градиента скалярного поля, хронона - определяющего выделенное направление времени. Хронометрическая теория допускает ультрафиолетовое продолжение в контексте гравитации с анизотропным масштабированием, предложенную П.Хоржавой.

В Ньютоновом пределе в рассмотренной модели возникает т.н. "хамелеонный" механизм, благодаря которому в окружении тел с высокой плотностью и большими гравитационными потенциалами эффекты эфира экранируются и тёмная материя ведет себя как Лоренц-инвариантные частицы. В отсутствие экранировки эффективно усиливается гравитация, что приводит к усилению Джинсовской неустойчивости. Кроме того, возникают силы, зависящие от скоростей тёмной материи, не имеющие аналогов в Лоренц-симметричном случае. Эти силы пренебрежимо малы для космологии, однако могут оказать существенное влияние на динамику галактик и скоплений галактик.

Также были изучены феноменологические следствия в космологии. Было показано, что однородная эволюция Вселенной в предложенной модели не отличается от стандартного случая Λ CDM-модели. Однако, нетривиальная динамика Лоренц-нарушающей тёмной материи проявляется на уровне космологических возмущений. Мы изучили эволюцию возмущений аналитически и численно, обнаружили ряд эффектов, которые будут весьма полезны в постановке ограничений на параметры Лоренц-нарушения из наблюдательных данных. Во-первых, рост возмущений плотности усилен в сравнении со стандартным случаем на малых масштабах порядка десятков-сотен мегапарсек, что приводит к усилению спектра мощности на соответствующих длинах волн. В окрестностях нашей галактики напротив, наблюдается недостаток карликовых галактик и других объектов, возникающих из возмущений на этих масштабах ([20, 21]). Однако, для постановки точных ограничений необходим дополнительный анализ нелинейной эволюции мод в рассматриваемой модели. Во-вторых, положение максимума спектра мощности контраста плотности будет смещено в область коротких длин волн. Положение максимума достаточно точно измеряется с помощью СМВ ([19]) и соответствующие ограничение на модель может быть поставлено уже в ближайшее время. В-третьих, возникает разность между возмущениями плотности в барионной (Лоренц-инвариантной) компоненте и холодной материи (барионы плюс Лоренц - нарушающая тёмная материя), что также может быть непосредственно измерено в астрономических наблюдениях. В-четвертых, появляется анизотропное натяжение, которое приводит к разнице между гравитационными потенциалами в Ньютоновой калибровке на очень больших масштабах (порядка гигапарсека). Этот эффект довольно слаб и его измерение является, скорее всего, делом отдаленного будущего. В-пятых, возмущения плотности и скоростей на очень малых масштабах испытывают осцилляции. Амплитуда этих осцилляций

мала для естественного набора параметров рассматриваемой модели и их испытывают только моды, уже начавшие нелинейную стадию эволюции. Последние обстоятельства существенно затрудняют экспериментальное изучение осцилляций.

Резюмируя, заметим, что постановка существенных (на уровне 1%) космологических ограничений на Лоренц-нарушение в секторе тёмной материи вполне возможна, однако требует дополнительной работы как со стороны теоретиков (реалистичные симуляции крупномасштабной структуры и микроволнового излучения), так и наблюдателей (совершенствование методов обработки данных и увеличение точности прецизионной космологии).

А Эффективное описание тёмной материи в терминах идеальной жидкости

Использование Лагранжева подхода позволяет работать с тёмной материей на стандартном полевом языке, что сильно облегчает рассмотрение её взаимодействия с другими полями. В Лоренц-инвариантном случае действие тёмной материи имеет вид:

$$S_{fluid} \equiv - \int d^4x \sqrt{-g} F(B), \quad (117)$$

Где B связан с определителем матрицы B^{IJ} ,

$$B \equiv - \det B^{IJ}, \quad (118)$$

$$B^{IJ} \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J, \quad B_{IJ} \equiv (B^{IJ})^{-1}, \quad (119)$$

составленной из тройки скалярных полей ϕ^I , $I = \{1, 2, 3\}$. Поля ϕ^I можно интерпретировать как пространственные координаты в сопутствующей среде системе отсчета и принять $\phi(\mathbf{x}, t)^I = x^I$ в основном состоянии. Из введенных величин можно сконструировать сохраняющийся вектор $n^\mu \equiv \sqrt{B} v^\mu$, где v^μ – вектор скорости жидкости:

$$v^\mu = - \frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}}{6\sqrt{-gB}} \partial_\nu \phi^I \partial_\sigma \phi^J \partial_\rho \phi^K \epsilon_{IJK}. \quad (120)$$

В последнем выражении мы использовали полностью антисимметричные псевдотензоры $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$, ϵ_{IJK} :

$$\epsilon^{0123} = -1, \quad \epsilon_{123} = 1. \quad (121)$$

Сохранение n^μ позволяет интерпретировать его как вектор тока, а величину \sqrt{B} как концентрацию частиц $\sqrt{B} = n$.

Функция F в выражении (117) определяет уравнение состояния жидкости. Далее, из Лагранжиана (117) получаем тензор энергии импульса (67)

$$T_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu} - 2F' B B_{IJ} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J. \quad (122)$$

Используя соотношение

$$g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu = B_{IJ} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J, \quad (123)$$

находим, что F является плотностью энергии жидкости

$$F = \rho, \quad p = -2F'B + F. \quad (124)$$

Предполагая, что давление тёмной материи пренебрежимо мало на всех интересующих нас этапах эволюции Вселенной, из уравнения (124) получаем $F \propto \sqrt{B}$. Отсюда действие холодной тёмной материи:

$$S_{dm} = -\rho_0 \int d^4x \sqrt{-gB}. \quad (125)$$

После вариации последнего с учетом (120) получаем тензор энергии-импульса

$$T_{[dm]\mu\nu} = \rho_0 \sqrt{B} v_\mu v_\nu. \quad (126)$$

В терминах введенного ранее триплета скалярных полей ϕ^I получаем действие, описывающее взаимодействие тёмной материи и эфира:

$$S_{\text{æ-dm}} = \rho_0 \int d^4x \left[\frac{Y_1 + 2Y_2}{6} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} u_\mu \partial_\nu \phi^I \partial_\lambda \phi^J \partial_\rho \phi^K \epsilon_{IJK} + \frac{Y_2}{36\sqrt{-gB}} (\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} u_\mu \partial_\nu \phi^I \partial_\lambda \phi^J \partial_\rho \phi^K \epsilon_{IJK})^2 \right]. \quad (127)$$

Что дает тензор энергии-импульса

$$T_{[\text{æ-dm}]\mu\nu} = Y_2 \rho_0 \sqrt{B} (u_\mu v^\mu)^2 v_\mu v_\nu. \quad (128)$$

Из действия эфира (2) по определению (67) получаем:

$$T_{[\text{æ}]\mu\nu} = M_p^2 \left[2\nabla_\sigma K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)} - \nabla_\lambda (K_{(\mu\nu)} u^\lambda) - \nabla_\sigma (K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)}) + \nabla_\sigma (K_{(\mu}{}^\sigma u_{\nu)}) - c_1 \nabla_\mu u^\lambda \nabla_\nu u_\lambda + c_1 \nabla_\lambda u_\mu \nabla^\lambda u_\nu - 2c_4 a_\sigma u_{(\nu} \nabla_{\mu)} u^\sigma + c_4 a_\mu a_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^\sigma{}_\lambda \nabla_\sigma u^\lambda - l u_\mu u_\nu \right], \quad (129)$$

где использованы обозначения:

$$K^\mu{}_\sigma \equiv K^{\mu\nu} \nabla_\nu u^\sigma, \quad (130)$$

$$a_\mu \equiv u^\lambda \nabla_\lambda u_\mu, \quad (131)$$

и индексы в круглых скобках обозначают симметризацию:

$$K_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (K_{\mu\nu} + K_{\nu\mu}). \quad (132)$$

Далее, воспользуемся действиями (2), (127) для получения уравнения движения эфира

$$M_p^2 [\nabla_\mu K^\mu{}_\nu - c_4 a^\rho \nabla_\nu u_\rho - l u_\nu] - \rho_0 \sqrt{B} [Y_1 + 2Y_2 (1 - u_\mu v^\mu)] v_\nu = 0. \quad (133)$$

Умножая на u^ν и используя единичность нормы (4) получим выражение для Лагранжева множителя:

$$l = u^\nu \nabla_\mu K^\mu{}_\nu - c_4 a^\rho a_\rho - \frac{\rho_0 \sqrt{B}}{M_p^2} [Y_1 + 2Y_2 (u_\mu v^\mu) - 2Y_2 (u_\mu v^\mu)^2]. \quad (134)$$

Подставляя Лагранжев множитель в (129) с учетом (128), (126) получаем суммарное действие системы эфир–тёмная материя:

$$\begin{aligned}
& T_{[ae]\mu\nu} + T_{[ae-dm]\mu\nu} + T_{[dm]\mu\nu} = \\
& M_p^2 \left[2\nabla_\sigma K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)} - \nabla_\lambda (K_{(\mu\nu)} u^\lambda) - \nabla_\sigma (K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)}) + \nabla_\sigma (K_{(\mu}{}^\sigma u_{\nu)}) \right. \\
& \quad - c_1 \nabla_\mu u^\lambda \nabla_\nu u_\lambda + c_1 \nabla_\lambda u_\mu \nabla^\lambda u_\nu - 2c_4 u_{(\nu} \nabla_{\mu)} u^\sigma a_\sigma + c_4 a_\mu a_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^\sigma{}_\lambda \nabla_\sigma u^\lambda \quad (135) \\
& \quad \left. - u_\mu u_\nu u^\lambda \nabla_\sigma K^\sigma{}_\lambda + c_4 a_\rho a^\rho u_\mu u_\nu \right] \\
& \quad + \rho_0 \sqrt{B} u_\mu u_\nu [Y_1 + 2Y_2(u_\lambda v^\lambda) - 2Y_2(u_\lambda v^\lambda)^2] + \rho_0 \sqrt{B} v_\mu v_\nu [1 + Y_2(u_\mu v^\mu)^2].
\end{aligned}$$

Чтобы получить тензор энергии-импульса системы хронон–тёмная материя, достаточно учесть переопределение констант (7) и условие нулевой завихренности (6), которое приводит к

$$\nabla_\rho u_\sigma = \nabla_\sigma u_\rho + u_\rho a_\sigma - u_\sigma a_\rho. \quad (136)$$

Уравнение движения хронона отличается от уравнений эфира (133,134) наличием дополнительной производной, которая возникает из-за того, что вариация δu_μ в этом случае пропорциональна градиенту от вариации $\delta\varphi$. Используя выражения

$$\mathcal{P}_\mu^\nu \equiv \delta_\mu^\nu - u_\mu u^\nu, \quad (137)$$

$$X = \nabla^\mu \varphi \partial_\mu \varphi, \quad (138)$$

получаем:

$$\nabla_\rho \left[\frac{\mathcal{P}^{\rho\mu}}{\sqrt{X}} \left(-\nabla_\nu K^\nu{}_\mu + \alpha a_\nu \nabla_\mu u^\nu - \frac{1}{M_p^2} \rho_0 \sqrt{B} v_\mu (Y_1 + 2Y_2[1 - u_\lambda v^\lambda]) \right) \right] = 0. \quad (139)$$

Напомним, что различия между двумя случаями не существенны для скалярного сектора возмущений.

Наконец, уравнение движения тёмной материи, следующее из (125), (127):

$$\nabla_\mu \left[\rho_0 \sqrt{B} B_{IJ} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi^J (1 + Y_2(u_\lambda v^\lambda)^2) + \rho_0 \left(\frac{Y_1 + 2Y_2}{2} - Y_2(u_\sigma v^\sigma) \right) \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}}{\sqrt{-g}} u_\nu \partial_\lambda \phi^J \partial_\rho \phi^K \epsilon_{IJK} \right] = 0. \quad (140)$$

Последнее уравнение может быть записано в более удобной форме. Для этого нужно умножить (140) на $\partial_\tau \phi^I$ и использовать выражения (123),

$$\sqrt{-g} \partial_\sigma \phi^I \partial_\nu \phi^J \partial_\rho \phi^K \epsilon_{IJK} = -\sqrt{B} v^\mu \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}, \quad (141)$$

что ведет к

$$\begin{aligned}
& -\nabla_\mu \left[\rho_0 \sqrt{B} \left((1 + Y_2(u_\lambda v^\lambda)^2) v_\nu v^\mu + (Y_1 + 2Y_2[1 - u_\lambda v^\lambda]) u_\nu v^\mu \right) \right] \\
& \quad + \rho_0 \sqrt{B} (Y_1 + 2Y_2(1 - u_\lambda v^\lambda)) \nabla_\nu u_\lambda v^\lambda = 0. \quad (142)
\end{aligned}$$

А.1 Линеаризованные вклады

Рассматривая скалярные возмущения всех изучаемых полей в конформной Ньютоновой калибровке и пренебрегая всеми нелинейными членами, получим следующие выражения:

$$\phi^I(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^I + \partial_I \pi(t, \mathbf{x}) \quad (143a)$$

$$g_{00} = a^2(1 + 2\phi), \quad g^{00} = a^{-2}(1 - 2\phi) \quad (143b)$$

$$g_{ij} = -a^2(1 - 2\psi)\delta_{ij}, \quad g^{ij} = -a^{-2}(1 + 2\psi)\delta^{ij} \quad (143c)$$

$$\sqrt{-g} = a^4[1 + \phi - 3\psi] \quad (143d)$$

$$B^{IJ} = -a^{-2}[\delta^{IJ}(1 + 2\psi) + 2\partial_I \partial_J \pi] \quad (143e)$$

$$B_{JK} = -a^2[\delta^{JK}(1 - 2\psi) - 2\partial_J \partial_K \pi] \quad (143f)$$

$$\sqrt{B} = a^{-3}(1 + 3\psi + \Delta\pi) \quad (143g)$$

$$v^0 = a^{-1}[1 - \phi] \quad (143h)$$

$$v^i = -a^{-1}[\partial_i \dot{\pi}] \quad (143i)$$

$$u_0 = v_0 = a(1 + \phi) \quad (143j)$$

$$u_i = a\partial_i \chi \quad (143k)$$

$$u_\sigma v^\sigma = 1 \quad (143l)$$

Линеаризованный тензор энергии-импульса системы эфир(хронон)-тёмная материя

$$T_{00}^{[\text{ae-dm}]} = \frac{\rho_0(Y_1 + Y_2)}{a}(1 + 2\phi + 3\psi + \Delta\pi), \quad (144a)$$

$$T_{0i}^{[\text{ae-dm}]} = \frac{\rho_0}{a}[Y_1 \partial_i \chi + Y_2 \partial_i \dot{\pi}], \quad (144b)$$

$$T_{ij}^{[\text{ae-dm}]} = 0, \quad (144c)$$

$$T_{00}^{[dm]} = \frac{\rho_0}{a}(1 + 2\phi + 3\psi + \Delta\pi), \quad (144d)$$

$$T_{0i}^{[dm]} = \frac{\rho_0}{a}\partial_i \dot{\pi}, \quad (144e)$$

$$T_{ij}^{[dm]} = 0, \quad (144f)$$

$$M_p^{-2} T_{00}^{[\text{ae}]} = -\frac{3}{2}\alpha\mathcal{B}\mathcal{H}^2 + \alpha\Delta\phi + \alpha\mathcal{H}(\mathcal{B} - 1)\Delta\chi + 3\mathcal{H}\alpha\mathcal{B}\dot{\psi} - \alpha\Delta\dot{\chi}, \quad (144g)$$

$$M_p^{-2} T_{0i}^{[\text{ae}]} = -\alpha\mathcal{B}\mathcal{H}\partial_i \phi - \alpha c_\chi^2 \partial_i \Delta\chi - \alpha\mathcal{B}\partial_i \dot{\psi}, \quad (144h)$$

$$\begin{aligned} M_p^{-2} T_{ij}^{[\text{ae}]} &= \delta_{ij} \frac{\alpha\mathcal{B}}{2}(\mathcal{H}^2 + 2\dot{\mathcal{H}}) - \beta\partial_i \partial_j \dot{\chi} - 2\beta\mathcal{H}\partial_i \partial_j \chi \\ &+ \delta_{ij} \left(-\alpha\mathcal{B}(\mathcal{H}^2 + 2\dot{\mathcal{H}})(\phi + \psi) - \alpha\mathcal{B}\mathcal{H}(\dot{\phi} + 2\dot{\psi}) \right. \\ &\left. - \alpha\mathcal{B}\ddot{\psi} - \lambda\Delta\dot{\chi} - 2\lambda\mathcal{H}\Delta\chi \right). \end{aligned} \quad (144i)$$

Уравнение движения эфира-хронона:

$$\begin{aligned} \frac{M_p^2}{a^2} \left[\alpha c_\chi^2 \Delta^2 \chi - 2\alpha\mathcal{H}^2 \Delta\chi + \alpha\Delta\dot{\phi} + \alpha\mathcal{B}\Delta\dot{\psi} + \alpha(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)(\mathcal{B} - 1)\Delta\chi \right. \\ \left. + \alpha\mathcal{H}(1 + \mathcal{B})\Delta\phi - 2\alpha\mathcal{H}\Delta\dot{\chi} - \alpha\Delta\ddot{\chi} \right] + \frac{\rho_0}{a^3} Y_1 \Delta(\chi - \dot{\pi}) = 0 \end{aligned} \quad (145)$$

Линеаризованное уравнение движения тёмной материи

$$\frac{\rho_0}{a^3}[-\mathcal{H}(1+Y_2)\partial_I\dot{\pi} - Y_1\mathcal{H}\partial_I\chi - (1+Y_2)\partial_I\ddot{\pi} - Y_1\partial_I\dot{\chi} + \partial_I\phi(1+Y_1+Y_2)] = 0. \quad (146)$$

Из линеаризованных выражений

$$\begin{aligned} T_{[dm]0}^0 + T_{[ae-dm]0}^0 &= \frac{\rho_0(1+Y_1+Y_2)}{a^3} (1+3\psi + \Delta\pi), \\ T_{[dm]i}^0 + T_{[ae-dm]i}^0 &= \frac{\rho_0}{a^3} \partial_i (Y_1\chi + (1+Y_2)\dot{\pi}), \end{aligned} \quad (147)$$

видно, что удобно ввести возмущения плотности и скоростей тёмной материи как

$$\begin{aligned} \delta\rho_{[dm]} &= (3\psi + \Delta\pi)\rho_{[dm]}, \\ v_{[dm]i} &= a \partial_i \dot{\pi}. \end{aligned}$$

В Комментарии к численному решению

Полный набор линеаризованных уравнений состоит их уравнений Эйнштейна (70a, 70b, 70c, 70d), уравнений движения эфира и тёмной материи (72,73) и гидродинамических уравнений для обычной материи и радиации (75, 76). Однако, эти уравнения не являются независимыми. Для численного интегрирования мы выбрали только два уравнения Эйнштейна, (70c, 70d). Как было оговорено ранее, мы рассматриваем обычное вещество, состоящее из двух компонент: излучения и холодных барионов. Только первые вносят вклад в уравнение (70c). Поэтому чтобы замкнуть систему, нам достаточно рассмотреть гидродинамические уравнения (75, 76) только для излучения. Вводя

$$\delta_{[\gamma]} \equiv \frac{\delta\rho_{[\gamma]}}{\bar{\rho}_{[\gamma]}},$$

эти уравнения могут быть записаны как одно уравнение второго порядка,

$$\ddot{\delta}_{[\gamma]} - \frac{\Delta\delta_{[\gamma]}}{3} - \frac{4\Delta\phi}{3} - 4\ddot{\psi} = 0.$$

Проделав Фурье-преобразование и нормировав текущий масштабный фактор и константу Хаббла на единицу, $a(t_0) = 1$, $H_0 = 1$, получим конечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для численного решения:

$$\ddot{\psi} + \mathcal{H}(\dot{\phi} + 2\dot{\psi}) + (2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2)\phi - \frac{\beta + \lambda}{2 + \alpha\mathcal{B}}k^2(\dot{\chi} + 2\mathcal{H}\chi) - \frac{\Omega_\gamma}{2a^2}\delta_{[\gamma]} = 0, \quad (148)$$

$$\phi - \psi - \beta(\dot{\chi} + 2\mathcal{H}\chi) = 0, \quad (149)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} + 2\mathcal{H}\dot{\chi} + \frac{\beta + \lambda}{\alpha}k^2\chi + [\dot{\mathcal{H}}(1 - \mathcal{B}) + \mathcal{H}^2(1 + \mathcal{B}) + \frac{3\Omega_{dm}Y_1(1 + \alpha\mathcal{B}/2)}{\alpha(1 + Y_1 + Y_2)a}]\chi \\ - \frac{3\Omega_{dm}Y_1(1 + \alpha\mathcal{B}/2)}{\alpha(1 + Y_1 + Y_2)a^2}v_{[dm]} = \dot{\phi} + \mathcal{H}(1 + \mathcal{B})\phi + \mathcal{B}\dot{\psi}, \end{aligned} \quad (150)$$

$$\frac{\dot{v}_{[dm]}}{a} + \frac{Y_1}{1 + Y_2}(\dot{\chi} + \mathcal{H}\chi) - \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2}\phi = 0, \quad (151)$$

$$\ddot{\delta}_{[\gamma]} + \frac{k^2}{3}\delta_{[\gamma]} + \frac{4k^2}{3}\phi - 4\ddot{\psi} = 0. \quad (152)$$

Важным моментом является выбор начальных условий для системы (148-152). Они ставятся глубоко на радиационной стадии, когда моды находятся за горизонтом. Мы рассматриваем начальные условия, соответствующие адиабатической моде. Они должны быть регулярны в пределе $t \rightarrow 0$. Поэтому запишем при малых t :

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)}t, \quad \psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}t, \quad \delta_{[\gamma]} = \delta_{[\gamma]}^{(0)} + \delta_{[\gamma]}^{(1)}t, \quad (153a)$$

$$\chi = \chi^{(1)}t + \chi^{(2)}\frac{t^2}{2}, \quad v_{[dm]} = v^{(2)}\frac{t^2}{2}. \quad (153b)$$

Подставив эти разложения в уравнения (148-152), получаем при $t \rightarrow 0$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta_{[\gamma]}^{(0)} &= -2\phi^{(0)}, \quad \delta_{[\gamma]}^{(1)} = 4\psi^{(1)}, \\ \phi^{(0)} - \psi^{(0)} - 3\beta\chi^{(1)} &= 0, \quad \phi^{(1)} - \psi^{(1)} - 2\beta\chi^{(2)} = 0, \\ \chi^{(1)} &= \phi^{(0)}/2, \\ (3 + \mathcal{B})\chi^{(2)} + \frac{3\Omega_{dm}Y_1(1 + \alpha\mathcal{B}/2)}{\alpha(1 + Y_1 + Y_2)\sqrt{\Omega_\gamma}}\chi^{(1)} - \frac{3\Omega_{dm}Y_1(1 + \alpha\mathcal{B}/2)}{2\alpha(1 + Y_1 + Y_2)\Omega_\gamma}v^{(2)} \\ &= (2 + \mathcal{B})\phi^{(1)} + \mathcal{B}\psi^{(1)}, \\ \frac{v^{(2)}}{\sqrt{\Omega_\gamma}} + 2\frac{Y_1}{1 + Y_2}\chi^{(1)} - \frac{1 + Y_1 + Y_2}{1 + Y_2}\phi^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что $a = \sqrt{\Omega_\gamma}H_0t$ на радиационной стадии. Кроме того, начальные условия должны "проходить" через (00) уравнение Эйнштейна³, что дает

$$\psi^{(1)} + \phi^{(1)} + \frac{\delta_{[\gamma]}^{(1)}}{2} + \frac{\Omega_{cm}}{\sqrt{\Omega_\gamma}} \left(\phi^{(0)} + \frac{\delta^{(0)}}{2} \right) = 0,$$

где δ -контраст плотности холодной материи:

$$\delta = \frac{\delta\rho_{[cm]}}{\rho_{[cm]}}.$$

Для адиабатической моды за горизонтом контрасты плотности связаны между собой ([18]):

$$\delta = \delta_{[dm]} = \delta_{[b]} = \frac{3}{4}\delta_{[\gamma]}.$$

Используя эти соотношения, мы получили, что все коэффициенты в (153) определяются в терминах $\phi^{(0)}$.

Подобные рассуждения также дают начальные условия и для Λ CDM. Так как мы, в основном, заинтересованы отношением различных величин в нашей модели к Λ CDM, то мы можем нормировать $\phi^{(0)}$ произвольно, но одинаково в обоих моделях. На практике, мы выбрали $\phi^{(0)} = 1$.

После вычисления всех неизвестных величин в системе (148-152), контраст плотности холодной материи может быть получен из уравнения (70a):

³(0i)-уравнение (70b) не налагает новых ограничений.

$$\begin{aligned}
\delta_{[cm]} &= \frac{\delta\rho_{[b]} + \delta\rho_{[dm]}}{\rho_{[cm]}} = \\
&= \frac{a}{3\Omega_{cm}(1 + \alpha\mathcal{B}/2)} [-2k^2\psi - 6\mathcal{H}\dot{\psi} + \alpha k^2\phi + \alpha k^2\mathcal{H}\chi(\mathcal{B} - 1) - 3\mathcal{H}\alpha\mathcal{B}\dot{\psi} - \alpha k^2\dot{\chi}] \quad (154) \\
&- 2\phi \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{cm}} a^3 + \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_{cm}a} \right) - \frac{\Omega_\gamma}{\Omega_{cm}a} \delta_{[\gamma]}
\end{aligned}$$

Для вычисления контраста плотности барионов, мы дополнительно решаем стандартные уравнения (75, 76)

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{v}_{[b]}}{a} - \phi &= 0, \\
\dot{\delta}_{[b]} + \frac{k^2}{a} v_{[b]} - 3\dot{\psi} &= 0,
\end{aligned}$$

с начальными условиями, такими же как в Λ CDM-модели.

Список литературы

- [1] P. Hořava. “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,”. *Phys. Rev. D*, **79**:084008, [arXiv:0901.3775 [hep-th]]., 2009.
- [2] D. Mattingly. “Modern tests of Lorentz invariance,”. *Living Rev. Rel.*, **8**:5, [arXiv:gr-qc/0502097]., 2005.
- [3] D. Blas and S.Sibiryakov. “Technically natural dark energy from Lorentz breaking,”. *JCAP*, **1107**:026, [arXiv:1104.3579 [hep-th]]., 2011.
- [4] C. Eling, T. Jacobson, and D. Mattingly. “Einstein-Aether Theory,”. in *Deserfest proceedings*, 1:1, [arXiv:gr-qc/0410001]., 2004.
- [5] T. Jacobson and D. Mattingly. “Gravity with a dynamical preferred frame,”. *Phys. Rev. D*, **64**:024028, [arXiv:gr-qc/0007031]., 2001.
- [6] T. Jacobson. “Einstein-aether gravity: a status report,”. *PoS*, **QG-PH**:020, [arXiv:0801.1547 [gr-qc]]., 2007.
- [7] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov. “Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy,”. *JHEP*, **1104**:018, [arXiv:1007.3503 [hep-th]]., 2011.
- [8] T. Jacobson. “Extended Horava gravity and Einstein-aether theory,”. *Phys. Rev. D*, **81**:101502, [Erratum-ibid. D **82**, 129901 (2010)] [arXiv:1001.4823 [hep-th]]., 2010.
- [9] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov. “Consistent Extension Of Horava Gravity,”. *Phys. Rev. Lett.*, **104**:181302, [arXiv:0909.3525 [hep-th]]., 2010.

- [10] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov. “*Comment on ‘Strong coupling in extended Horava-Lifshitz gravity’*,”. *Phys. Lett. B*, **688**:350, [arXiv:0912.0550 [hep-th]], 2010.
- [11] S. M. Carroll and E. A. Lim. “*Lorentz-violating vector fields slow the universe down*,”. *Phys. Rev. D*, **70**:123525, [arXiv:hep-th/0407149]., 2004.
- [12] D. Blas and H. Sanctuary. “*Gravitational Radiation in Horava Gravity*,”. *Phys. Rev. D*, **84**:064004, [arXiv:1105.5149 [gr-qc]]., (2011).
- [13] M. Nakashima and T. Kobayashi. “*B-mode polarization in Einstein-aether theory*,”. *Phys. Rev. D*, **84**:084051, [arXiv:1103.2197 [astro-ph.CO]]., (2011).
- [14] J. Khoury and A. Weltman. “*Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space*,”. *Phys. Rev. Lett.*, **93**:171104, [astro-ph/0309300]., 2004.
- [15] N. Andersson and G. L. Comer. “*Relativistic fluid dynamics: Physics for many different scales*,”. *Living Rev. Rel.*, **10**:1, [gr-qc/0605010]., 2005.
- [16] S. Dubovsky, T. Gregoire, A. Nicolis, and R. Rattazzi. “*Null energy condition and superluminal propagation*,”. *JHEP*, **0603**:025, [arXiv:hep-th/0512260]., 2006.
- [17] J. A. Frieman and B. A. Gradwohl. “*Dark matter and the equivalence principle*,”. *Phys. Rev. Lett.*, **67**:2926., 1991.
- [18] D.S. Gorbunov and V.A. Rubakov. “*Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory*”. *World Scientific*, 2011.
- [19] M. Tegmark *et al.* “*The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey*,”. *The Astrophysical Journal*, **606**:702–740, [arXiv:astro-ph/0310725]., 2004.
- [20] L.E. Strigari *et al.* “*Redefining the Missing Satellites Problem*,”. *The Astrophysical Journal*, **669**:676–683, [arXiv:0704.1817]., 2007.
- [21] A.V. Kravtsov, O.Y. Gnedin, and A.A. Klypin. “*The Tumultuous Lives of Galactic Dwarfs and the Missing Satellites Problem*,”. *The Astrophysical Journal*, **609**:482–497, [arXiv:astro-ph/0401088]., 2004.