

Задачи к экзамену/зачёту

Там, где это возможно, ответ требуется довести “до числа”.

Задача 1. Степенная инфляция.

1) Показать, что расширение пространственно-плоской Вселенной по закону

$$a = a_0 t^\alpha, \quad \alpha > 1 \quad (1)$$

позволяет решить проблемы горизонта, плоскостности и др., т. е. является инфляционным расширением. Предполагая, что такое расширение обусловлено скалярным полем ϕ и предполагая режим медленного скатывания скалярного поля на этой стадии, найти скалярный потенциал модели. При каких α и/или ϕ режим медленного скатывания действительно имеет место? Найти скалярный потенциал также в случае, когда приближение медленного скатывания не работает.

2) В ситуации, когда приближение медленного скатывания работает, найти спектр первичных флуктуаций плотности. Отличается ли он от плоского? Указание: считать, что режим (1) сменяется обычным режимом радиационного доминирования при некотором ϕ_0 .

Задача 2.

Измеряя спектр флуктуаций плотности и спектр реликтовых гравитационных волн, можно ли восстановить скалярный потенциал $V(\phi)$ в инфляционной теории с одним скалярным полем (предполагается, что выполнены условия медленного скатывания)? Оценить интервал значений ϕ , где это можно сделать, если ограничиться сегодняшними длинами волн больше 100 кпк (размер областей, из которых образуются карликовые галактики). Предполагать, что остальные параметры Вселенной (Ω_{CDM} , Ω_B , Ω_Λ , H_0 , и т. д.) известны, в частности $\Omega_{tot} = 1$.

Задача 3.

Будем считать, что для возникновения жизни необходимо образование хотя бы карликовых галактик, в которые вещество собирается с расстояния порядка 100 кпк. Известно, что такие галактики образуются при $z \lesssim 10$. Известно также, что на стадии доминирования тёмной энергии возмущения плотности материи не растут. Будем считать тёмную энергию не зависящей от времени, $\rho_{DE} = \rho_{vac} = \text{const}$ (космологическая постоянная). Найти, в гипотетических Вселенных с какими значениями космологической постоянной ρ_{vac} жизнь действительно возникла бы, а с какими – нет. Вселенные считать пространственно-плоскими. Космологические параметры, не за-

висящие от ρ_{vac} (включая спектр первичных возмущений плотности), считать такими же, как в нашей Вселенной. Рассмотреть как случай $\rho_{vac} > 0$ (как в нашей Вселенной), так и случай $\rho_{vac} < 0$.

Задача 4.

Пусть первичный спектр флуктуаций плотности — плоский. Пусть, далее, флуктуации масштаба 3 Мпк становятся нелинейными при $z = 5$. Флуктуации каких масштабов находятся в нелинейном режиме сегодня, а каких масштабов — в линейном? Считать $\Omega_{CDM} = 0.25$, $\Omega_B = 0.05$, $\Omega_\Lambda = 0.75$, $h = 0.7$.

Задача 5. Квинтэссенция

Предположим, что космологическая постоянная в точности равна нулю, а современное ускоренное расширение Вселенной обусловлено скалярным полем ϕ (его называют “квинтэссенцией”) со степенным потенциалом. В моделях с потенциалами

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2$$

и

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

найти ограничения на параметры m и λ , следующие из космологических данных.

Задача 6.

Рассмотрим теорию инфляции с потенциалом инфлатона $\lambda\phi^4$ и дополнительным членом в действии

$$\xi \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2,$$

где ξ — действительный параметр. Считать, что $\xi \gg 1$.

1) При каких значениях ϕ происходит инфляция с медленным скатыванием?

2) Найти наклон спектра возмущений инфлатона $\delta\phi$ для мод за горизонтом.

3) Найти наклон спектра тензорных возмущений.

Задача 7. Коллапс в ньютоновой теории.

Рассмотрим Вселенную, заполненную нерелятивистским веществом, в рамках ньютоновой теории. Напомним, что однородное решение имеет структуру

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(t), \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{x} \cdot H(t), \quad \bar{\phi} = f(t)\mathbf{x}^2.$$

Пусть в “начальный момент” $t = t_0$ в сферической области размера r_0 имеется малое однородное превышение плотности над фоном:

$$\delta\rho(t_0) = \begin{cases} \delta\rho_0, & |\mathbf{x}| < r_0, \\ 0, & |\mathbf{x}| > r_0, \end{cases}$$

где $\delta\rho_0 \ll \bar{\rho}(t_0)$ и $\delta\rho_0$ не зависит от \mathbf{x} . Найти, при каком времени t_c расширение сферы повышенной плотности прекратится и сменится коллапсом. Найти отношение $\rho(\mathbf{x} = 0)/\bar{\rho}$ (отношение плотности в центре сферы к средней плотности) в этот момент времени.

Задача 8.

Показать, что в теории с гравитационным действием

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2) \quad (2)$$

при правильном выборе знака параметра α реализуется инфляционный режим расширения Вселенной. Каков потенциал теории со скалярным инфлатонным полем, но без члена R^2 , в которой инфляция происходит точно так же, как в теории с действием (2)?

Задача 9.

Найти зависимость от времени относительных возмущений плотности холодной тёмной материи δ_{CDM} для мод под горизонтом во Вселенной, где доминирует гипотетическое вещество с уравнением состояния $p = w\rho$. Рассмотреть случаи $w > 1/3$ и $w < 1/3$. Считать, что давление самой тёмной материи равно нулю; гравитационными потенциалами, генерируемыми гипотетическим веществом, пренебречь.

Задача 10.

Пусть при $t < t_*$, где $t_* < 0$, пространственно-плоская Вселенная сжималась по закону

$$a(t) = |t|^\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{3},$$

а при $t = t_*$ сжатие сменилось расширением. Будем считать, что сразу после момента t_* наступила известная горячая стадия, а температура в это время была равна T_* . Найти спектр первичных тензорных возмущений (включая его амплитуду) в такой теории, считая, что при $t \rightarrow -\infty$ гравитационных волн во Вселенной не было.

Задача 11.

Пусть эволюция Вселенной происходит по закону

$$a(t) = \begin{cases} a_0 = const, & -\infty < t < t_*, \\ a_0(t/t_*)^{\frac{1}{2}}, & t > t_*, \end{cases}$$

причем при $t = t_*$ наступает известная горячая стадия с начальной температурой $T(t_*) = T_*$. Найти спектр первичных тензорных возмущений (включая его амплитуду), считая, что при $t \rightarrow -\infty$ гравитационных волн во Вселенной не было.

Задача 12.

Пусть помимо инфлатона в теории имеется скалярное поле ϕ с потенциалом

$$V(\phi) = \mu^4[\exp(\phi^2/\phi_0^2) - 1],$$

где μ и ϕ_0 — параметры размерности массы. Пусть параметр Хаббла на инфляционной стадии постоянен во времени и равен H , при этом $H \gg \mu$, $H \ll \phi_0$. Оценить типичное максимальное значение поля ϕ в областях хаббловского размера на инфляционной стадии, считая, что поле ϕ вносит малый вклад в плотность энергии по сравнению с вкладом инфлатона. Верно ли на самом деле последнее предположение о малости вклада поля ϕ ?

Задача 13.

Пусть параметр Хаббла H меняется со временем следующим образом

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ H_0 = const, & t > 0. \end{cases}$$

Пусть во Вселенной имеется скалярное поле ϕ массы m , минимально связанное с гравитацией, при этом $m \ll H_0$. Найти вклад мод за горизонтом в флуктуацию поля $\langle \phi^2(\mathbf{x}) \rangle$ как функцию времени при $t \gg m^{-1}$.