

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

Дипломная работа

**«АНИЗОТРОПИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ СВЕРХВЫСОКИХ
ЭНЕРГИЙ ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА KASCADE»**

Выполнил студент

643 группы

Шинкевич Егор Максимович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Кузнецов Михаил Юрьевич

Допущена к защите «___» _____ 2026 г.

Зав.кафедрой

д.ф.-м.н. Троицкий С.В. _____

МОСКВА

2026

Оглавление

Введение	2
Основная часть	4
1 Галактическое магнитное поле и анизотропия	4
2 Методы анализа анизотропии	6
2.1 Экспозиция и Монте-Карло	6
2.2 Крупномасштабная анизотропия	7
2.3 Мелкомасштабная и среднемасштабная анизотропия	9
2.4 Сравнение чувствительности автокорреляционной функции и спектра мощности	11
3 Эксперимент, данные и Монте-Карло	18
4 Анализ и результаты	22
4.1 Анализ крупномасштабной анизотропии	22
4.2 Автокорреляционный анализ	24
4.3 Мультипольный анализ	26
Выводы	29
Заключение	31
Приложение	32
А Сравнение оценок автокорреляции	32
В Полные результаты анализа крупномасштабной анизотропии	33
Список литературы	35

ВВЕДЕНИЕ

Наши знания о космических лучах даже спустя столетие после их открытия остаются обрывочными, см. например [1]. Так, на сегодняшний день, происхождение космических лучей с энергиями выше 1 ПэВ достоверно неизвестно. Предполагается, что как минимум до энергий 3-4 ПэВ в случае протонов и 80 ПэВ в случае железа, космические лучи рождаются внутри нашей Галактики и удерживаются ее магнитным полем. Долгое время основным кандидатом на ускорители частиц до таких энергий были галактические сверхновые, но недавние наблюдения источников гамма-излучения с энергиями до 1 ПэВ обсерваторией LHAASO выявил лишь частично связь со сверхновыми и таким образом поставили эту модель под сомнение [2].

Изучение анизотропии направлений прихода космических лучей сверхвысоких энергий является одной из важных задач астрофизики, позволяющей получить ключевые сведения об источниках космических лучей и механизмах их распространения в галактических и внегалактических магнитных полях. Поскольку прямое наблюдение космических лучей таких энергий невозможно из-за их крайне низкого потока, основным методом их изучения выступает косвенная наземная регистрация широких атмосферных ливней. При взаимодействии первичной частицы с ядрами атомов атмосферы Земли возникает масштабный каскад вторичных частиц. Наземные детекторы измеряют электромагнитную и мюонную компоненты этих ливней, что позволяет с высокой точностью восстанавливать энергию и направление прихода исходной первичной частицы.

Данное исследование опирается на анализ массового состава космических лучей по данным эксперимента KASCADE [3]. В упомянутой работе была продемонстрирована высокая эффективность сверточной нейронной сети

(CNN) для классификации первичных частиц по конкретным массовым группам (p, He, C, Si и Fe), обученной на Монте-Карло симуляциях на базе адронной модели QGSJet-II.04. Возможность разделения данных на отдельные группы открыла новые возможности для поиска анизотропии, поскольку ожидается, что частицы с различной магнитной жёсткостью испытывают разные отклонения в магнитных полях и могут иметь различное происхождение.

Основными целями данной дипломной работы являются, во-первых, проведение сравнительного анализа чувствительности к анизотропии двух ключевых статистических сигнатур, автокорреляционной функции и углового спектра мощности (C_ℓ), с учётом реальной экспозиции детектора KASCADE. Второй же целью является непосредственно анализ анизотропии как крупномасштабной, так и средне- и мелкомасштабной, в unblind-наборе данных KASCADE, составляющего 10% от полной статистики. Особое внимание уделяется статистической значимости результатов с учётом эффекта множественных сравнений (Look-Elsewhere effect).

Структура работы выстроена следующим образом. В первом разделе рассматривается влияние галактического магнитного поля на анизотропию космических лучей. Во втором разделе рассматриваются методы поиска анизотропии, используемые в работе, а также их сравнение в случае средних и мелких масштабов. В третьем разделе описываются используемые для анализа данные. В четвертом разделе представлен результат анализа анизотропии в данных эксперимента KASCADE в зависимости от типа первичной частицы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Галактическое магнитное поле и анизотропия

Прежде чем переходить непосредственно к статистическому анализу направлений прихода космических лучей, зарегистрированных установкой KASCADE, необходимо кратко рассмотреть физические предпосылки возникновения наблюдаемых структур. Как известно, характер распределения направлений прихода космических лучей на небесной сфере связан с механизмами их удержания и переноса в межзвездном магнитном поле. Космические лучи с энергиями вплоть до нескольких десятков ПэВ имеют галактическое происхождение. Динамика их движения внутри Галактики в основном определяется силой Лоренца при взаимодействии с галактическим магнитным полем, которое состоит из регулярной и турбулентной компонент.

Поскольку межзвездная среда заполнена магнитными неоднородностями, движение заряженных частиц носит диффузионный характер. Вместо прямолинейного движения от источников частицы совершают случайные блуждания. Это приводит к эффективному перемешиванию направлений и изотропизации потока космических лучей на больших временах удержания частиц. Однако, несмотря на перемешивание, остаточная анизотропия может сохраняться, если распределение источников космических лучей неоднородно [1].

Важным параметром, определяющим характер взаимодействия частицы с магнитным полем, является её магнитная жёсткость R , которая характеризует способность частицы сопротивляться отклоняющему действию поля. Магнитная жёсткость определяется как отношение импульса частицы к её заряду:

$$R = \frac{pc}{Ze}, \quad (1)$$

Для ультррелятивистских частиц, исследуемых в эксперименте KASCADE, энергия практически эквивалентна произведению импульса на скорость света ($E \approx pc$), что позволяет использовать в расчетах более удобное соотношение:

$$R \approx \frac{E}{Ze}. \quad (2)$$

В рамках изотропного диффузионного приближения коэффициент пространственной диффузии заряженных частиц моделируется степенной зависимостью от магнитной жёсткости:

$$D(R) = D_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\delta_D}, \quad (3)$$

где параметр δ_D определяется спектром магнитной турбулентности межзвездной среды ($\delta_D = 1/3$ для колмогоровской турбулентности и $\delta_D = 1/2$ для спектра Крайчнана). Из уравнения (3) видно, что с ростом магнитной жёсткости коэффициент диффузии увеличивается, то есть частицы слабее рассеиваются локальными неоднородностями полей и быстрее покидают Галактику.

Неоднородное пространственное распределение источников космических лучей формирует градиент плотности частиц ∇n . Наличие этого градиента порождает диффузионный поток космических лучей, что приводит к наличию крупномасштабной дипольной анизотропии. Амплитуда такого диполя напрямую зависит от коэффициента диффузии:

$$\vec{\delta}_{diff} = \frac{3D(R)}{c} \frac{\nabla n}{n}. \quad (4)$$

Следовательно, классическая теория диффузии предсказывает монотонный рост крупномасштабной анизотропии с увеличением энергии как $\delta \propto E^{\delta_D}$.

Однако реальное распределение направлений прихода космических лучей, в особенности на средних и малых масштабах, оказывается значительно сложнее. Так, модель изотропной линейной диффузии не предсказывает средне- и мелкомасштабную анизотропию, наблюдаемую для энергий ТэВ-ПэВ, например, в экспериментах IceCube [4] и HAWC [5]. Наличие такой анизотропии привело к ряду объяснений, одним из которых является

учет роли локального турбулентного магнитного поля в формировании направления прихода космических лучей. Так, между парами траекторий локально наблюдаемых космических лучей должна присутствовать корреляция, так как частицы прилетающие под малыми углами друг к другу испытывают воздействие схожих ориентаций турбулентного магнитного поля. Эта идея нашла своё аналитическое продолжение в работах М. Алерса [6, 7]

2 Методы анализа анизотропии

Данная часть работы посвящена обзору и исследованию методов анализа анизотропии на всех угловых масштабах, а также способу генерации Монте-Карло наборов с учётом экспозиции детектора. Особое внимание уделено сравнению чувствительности автокорреляционной функции и углового спектра мощности в задаче анализа анизотропии на средних и мелких масштабах в условиях ограниченного поля зрения экспериментальной установки.

2.1 Экспозиция и Монте-Карло

Прежде всего, экспозиция детектора – это интегральная физическая величина, характеризующая суммарную наблюдательную способность экспериментальной установки за весь период сбора данных. В настоящей работе для симуляции изотропного набора данных используется относительная экспозиция детектора, описывающая неоднородность чувствительности установки по направлениям прихода частиц и выступающая в качестве функции плотности вероятности на сфере. Изотропные Монте-Карло наборы являются реализациями из N_{ev} событий по карте относительной экспозиции, соответствующей данной экспериментальной установке.

Для оценки мелко- и среднемасштабной анизотропии космических лучей в данной работе используются изотропные наборы Монте-Карло, по которым рассчитываются значимости соответствующих статистических сигнатур. Построение таких фоновых карт требует детального учета экспозиции детектора. Анализ эффективности установки KASCADE [3] в исследуемом диапазоне энергий и для различных типов частиц показал, что угловое

распределение событий отклоняется от чисто геометрического вида:

$$\frac{dN}{d \cos \theta} \propto \cos \theta, \quad \phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi), \quad (5)$$

где $\mathcal{U}(0, 2\pi)$ обозначает равномерное распределение на интервале $[0, 2\pi]$. Установленное несоответствие между реальной экспозицией и идеализированным геометрическим распределением [8] обусловило использование метода временного перемешивания (time-scrambling) [9].

В данной части работы при анализе методов поиска анизотропии используется исключительно геометрическое распределение относительной экспозиции $\omega(\delta)$, соответствующее широте a_0 , на которой находился детектор KASCADE, и максимальному зенитному углу $\theta_{max} = 30^\circ$. Относительная экспозиция в этом случае определяется следующим образом [8]:

$$\omega(\delta) \propto \cos(a_0) \cos(\delta) \sin(\alpha_m) + \alpha_m \sin(a_0) \sin(\delta), \quad (6)$$

где α_m дается формулой:

$$\alpha_m = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi > 1 \\ \pi, & \text{если } \xi < -1 \\ \arccos(\xi) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$\xi = \frac{\cos(\theta_{max}) - \sin(a_0) \sin(\delta)}{\cos(a_0) \cos(\delta)}.$$

2.2 Крупномасштабная анизотропия

Для поиска крупномасштабной анизотропии в условиях ограниченного поля зрения детектора можно применять одномерный анализ. Традиционный подход заключается в Рэлеевском анализе первой гармоники разложения распределения событий в ряд Фурье по прямому восхождению, однако этот метод очень чувствителен к систематическим ошибкам [10]. В данной работе для исследования крупномасштабной анизотропии используется метод Восток-Запад (East-West) [11]. Главное преимущество данного подхода — его инвариантность по отношению к экспозиции детектора, что устраняет влияние

суточных вариаций интенсивности и инструментальных эффектов на оценку дипольной компоненты.

Для N событий с локальными звёздными временами прихода t_i параметры диполя оцениваются с помощью гармонического анализа разности потоков в восточном и западном направлениях. Коэффициенты разложения первой гармоники определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \cos(t_i + \zeta_i), \\ b &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sin(t_i + \zeta_i), \end{aligned} \quad (7)$$

где фазовый сдвиг ζ_i принимает значения 0 и π для событий, зарегистрированных в восточной и западной локальных полусферах соответственно. Эти полусферы определяются относительно локального меридиана в горизонтальной системе координат (азимут $0^\circ < \phi < 180^\circ$ для Востока и $180^\circ < \phi < 360^\circ$ для Запада). На основе этих коэффициентов амплитуда проекции диполя на экваториальную плоскость \hat{D}_\perp и его фаза, а именно прямое восхождение $\hat{\alpha}_d$, восстанавливаются как:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\perp &= \frac{\pi}{2\langle \sin \theta \rangle} \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \hat{\alpha}_d &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\langle \sin \theta \rangle$ обозначает среднее значение синуса зенитного угла зарегистрированных событий.

Важной особенностью метода Восток-Запад является то, что статистическая значимость полученного результата может быть вычислена аналитически. В рамках нулевой гипотезы об изотропном распределении направлений прихода частиц амплитуда диполя подчиняется распределению Рэлея с параметром

$$\sigma = \frac{\pi}{2\langle \sin \theta \rangle} \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad (9)$$

в то время как фаза распределена равномерно. Вероятность того, что наблюдаемая амплитуда \hat{D}_\perp представляет собой флуктуацию изотропного

фона, задается выражением:

$$p(D_{\perp} > \hat{D}_{\perp}) = \exp\left(-\frac{\hat{D}_{\perp}^2}{2\sigma^2}\right). \quad (10)$$

2.3 Мелкомасштабная и среднемасштабная анизотропия

На сегодняшний день существует широкий набор методов для оценки уровня мелко- и среднемасштабной анизотропии в распределении космических лучей на небесной сфере. Среди наиболее широко используемых подходов – анализ автокорреляционной функции и мультипольное разложение углового распределения, с помощью которого определяется вклад отдельных мультипольных компонент в наблюдаемую анизотропию.

Автокорреляционная функция на сфере, измеряющая степень кластеризации событий или избыточную вероятность обнаружения двух объектов на заданном расстоянии друг от друга [12], может быть вычислена с помощью эстиматора Landy-Szalay [13]:

$$w(\psi) = \frac{DD(\psi) - 2DR(\psi) + RR(\psi)}{RR(\psi)}, \quad (11)$$

где $DD(\psi)$ — число пар событий в анализируемом наборе данных, $RR(\psi)$ — число пар событий в выборке Монте-Карло, соответствующей изотропному распределению, а $DR(\psi)$ — число перекрестных пар между этими наборами. Эстиматор Landy-Szalay учитывает краевые эффекты существенно лучше, чем наивная оценка [12]:

$$w(\psi) = \frac{DD(\psi)}{RR(\psi)} - 1, \quad (12)$$

что критически важно в условиях ограниченной экспозиции детектора. Подтверждение этому можно увидеть в приложении А, где проводится сравнительный анализ оценок для изотропного фона.

Следует отметить, что основной задачей данного исследования является прямая проверка гипотезы об изотропии космических лучей. В этом контексте в силу эффекта накопления кумулятивная автокорреляционная функция, в которой все пары в уравнении (11) рассчитываются в круге с угловым размером ψ , оказывается более чувствительной, чем

дифференциальная автокорреляционная функция, для которой в уравнении (11) пары рассчитываются в кольце размером $\{\psi, \psi + \delta\psi\}$.

Мультипольный анализ включает в себя разложение относительного потока космических лучей на сфере по сферическим гармоникам с коэффициентами a_{lm} :

$$\delta I(\vec{n}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vec{n}). \quad (13)$$

В данном исследовании для проверки гипотезы об изотропном распределении мы анализируем угловой спектр мощности:

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2, \quad (14)$$

где анизотропия проявляется в виде повышенных значений C_l на характерных угловых масштабах $\sim \pi/l$. Однако следует отметить, что в эксперименте KASCADE отсутствует полное покрытие небесной сферы, и спектр мощности, полученный непосредственно из карты, представляет собой свёртку спектра мощности экспозиции и спектра мощности истинного потока. В этом случае он называется псевдоспектром мощности \tilde{C}_l и подвержен перемешиванию мод между соседними мультиполями l . В нашей работе для коррекции спектра мощности применялся программный пакет PolSpice [14, 15]. Данный алгоритм использует связь между спектром мощности и пространственной корреляционной функцией посредством полиномов Лежандра:

$$\tilde{\xi}(\psi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \tilde{C}_l P_l(\cos \psi). \quad (15)$$

Корреляционная функция $\tilde{\xi}(\psi)$, вычисленная по псевдоспектру мощности, корректируется в пространственной области, а затем обратно преобразуется в истинный угловой спектр мощности \bar{C}_l :

$$\bar{C}_l = 2\pi \int_{-1}^1 \tilde{\xi}(\psi) P_l(\cos \psi) d(\cos \psi), \quad (16)$$

что в конечном итоге позволяет устранить корреляции между модами.

Для оценки статистической значимости обнаруженных отклонений вычисляется локальная значимость, или pre-trial p -value. Она определяется независимо для каждого углового масштаба ψ (в автокорреляционном анализе) или каждого мультиполя l (в мультипольном анализе) как доля смоделированных изотропных наборов данных, в которых амплитуда анизотропии превышает экспериментально наблюдаемое значение. Однако, поскольку поиск проводится для всех значений характерного параметра (ψ и l), необходимо учитывать эффект множественных сравнений (Look-Elsewhere effect). Для надежной интерпретации результатов вводится глобальная значимость, или post-trial p -value, которая учитывает вероятность возникновения статистической флуктуации в любой точке всего исследуемого интервала параметров. Эта величина также оценивается с помощью реализаций Монте-Карло как доля изотропных наборов, в которых локальное p -value в какой-либо точке рассматриваемого диапазона оказывается ниже минимального значения pre-trial p -value, полученного на реальных данных. Интересующий диапазон определяется характерным размером поля зрения детектора. Для эксперимента KASCADE при ограничении на зенитный угол $\theta < 30^\circ$ характерный угловой масштаб составляет примерно 60° . Следовательно, значение post-trial p -value вычисляется для углового диапазона $\psi < 60^\circ$ и мультипольного диапазона $l > 3$.

2.4 Сравнение чувствительности автокорреляционной функции и спектра мощности

При изначальном исследовании мелко- и среднемасштабной анизотропии автокорреляционный и мультипольный подходы привели к различным результатам. Наблюдаемые различия послужили основанием для проведения дополнительного анализа чувствительности этих методов к проявлениям анизотропии на соответствующих угловых масштабах в различных игрушечных моделях.

Для обеспечения более строгого сравнения между методами мы ввели кумулятивную статистику для углового спектра мощности. Значения C_l рассчитывались вплоть до $l_{max} = 180$ с шириной бина $\Delta l = 4$. По аналогии с автокорреляционной функцией, где суммирование начинается с наименьших

угловых масштабов (наивысших мультиполей), мы определяем кумулятивную мощность как:

$$C_i^{sum} = \sum_{j=i}^{N_{bin}} C_j^{bin}, \quad (17)$$

где i — индекс бина, а N_{bin} — общее число бинов. Ожидается, что кумулятивный эффект, как и в случае с автокорреляционной функции, должен увеличивать чувствительность спектра мощности к наличию анизотропии.

Для оценки чувствительности как автокорреляционного, так и мультипольного подходов к различным моделям анизотропии в условиях геометрической экспозиции детектора было сгенерировано $N_{it} = 10000$ изотропных наборов данных. Для сравнения использовались медианные значения pre-trial и post-trial p -value, рассчитанные по $N_{map} = 10$ реализациям карт для каждой модели с заданным спектром C_l , что позволяет учесть вариацию сгенерированных карт, соответствующих данному угловому спектру мощности. При этом для каждой карты сэмпировалось $N_{it} = 1000$ наборов событий. Каждый набор состоит из $N_{ev} = 10000$ событий. Анизотропия моделируется в виде карты, содержащей изотропную и анизотропную часть:

$$I(\vec{n}) = 1 + \epsilon \frac{f(\vec{n})}{\max(f(\vec{n}))}, \quad (18)$$

где $f(\vec{n})$ – рассматриваемая модель анизотропии, а ϵ определяет уровень анизотропии. Параметр ϵ выбирается таким образом, чтобы обеспечить регистрируемую хотя бы одним из методов анизотропию с учетом ограниченного числа событий. Произведение этой карты интенсивности и геометрической экспозиции установки KASCADE для зенитных углов $\theta < 30^\circ$ после соответствующей нормировки выступает в качестве функции плотности вероятности, на основе которой производится сэмпирование Монте-Карло событий.

1. Гауссова модель спектра мощности.

Модель задается через угловой спектр мощности C_l (см. рис. 1):

$$C_l = \exp\left(-\frac{(l - l_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (19)$$

По своему построению данная модель больше подходит для метода спектра мощности, поскольку она выделяет конкретный мультиполь. Тем не менее, эту модель также можно использовать для исследования того, в какой степени размытие спектра мощности и угловой размер структур влияет на чувствительность методов. Поэтому мы изучили чувствительность данной модели при различных значениях параметров σ и l_0 .

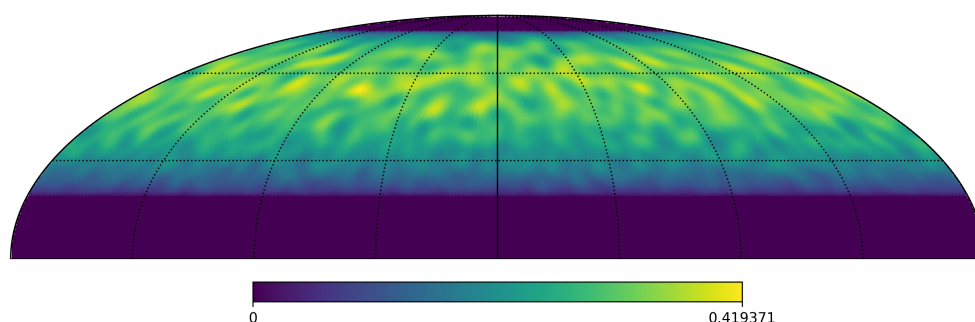
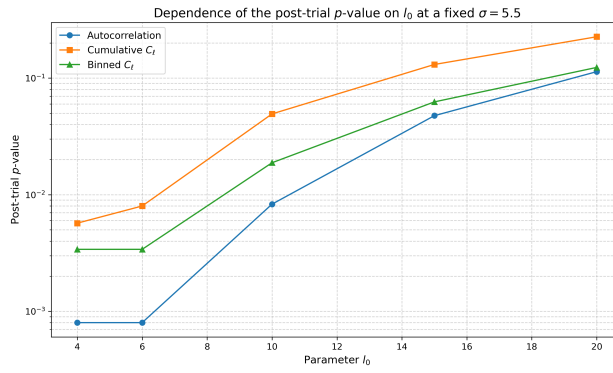


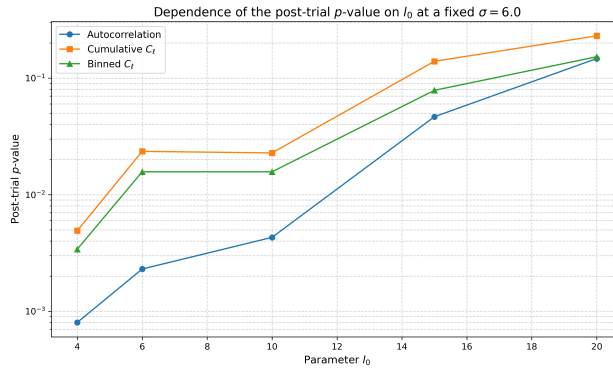
Рис. 1: Карта интенсивности, учитывающая экспозицию детектора, со спектром мощности согласно уравнению (19) ($\sigma = 10$, $l_0 = 30$).

Для начала была исследована модель с $\epsilon = 0.3$ в уравнении (18), для которого оба метода нечувствительны к анизотропии на высоких мультиполях и, следовательно, малых угловых масштабах. В то же время для данного уровня анизотропии оба метода демонстрируют высокую чувствительность на средних масштабах и, соответственно, низких мультиполях (см. рис. 2). Однако сопоставление их чувствительностей показывает, что, несмотря на кажущееся преимущество спектра мощности в рамках данной модели, автокорреляционный подход не только не уступает ему по итоговой значимости, но даже незначительно превосходит спектр мощности по величине *post-trial p-value*.

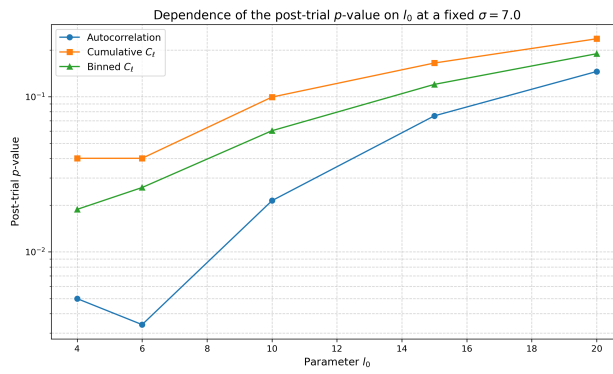
Затем была увеличена амплитуда анизотропии – $\epsilon = 0.35$ в уравнении (18), чтобы исследовать поведение методов на более мелких угловых масштабах и высоких мультиполях (см. рис. 3). В данном случае, как и ожидалось изначально, спектр мощности выявляет анизотропию эффективнее, чем автокорреляционная функция. Это преимущество особенно заметно при малых значениях σ , когда одиночный мультиполь выражен наиболее ярко. Более того, стоит отметить, что в рамках рассмотренных значений параметров для данной модели, при которых наблюдаются регулярные



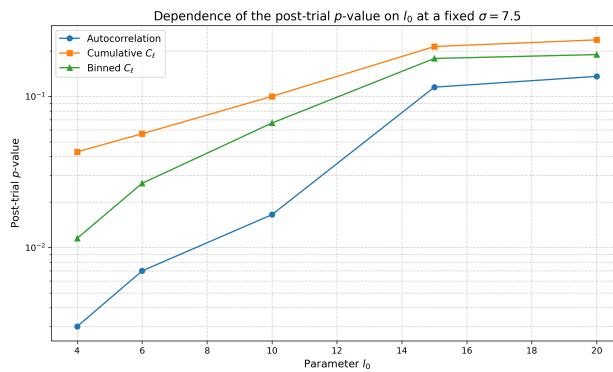
(a) $\sigma = 5.5$



(b) $\sigma = 6$



(c) $\sigma = 7$



(d) $\sigma = 7.5$

Рис. 2: Сравнение автокорреляционной функции и спектра мощности для модели из уравнения (19) при различных значениях l_0 и фиксированном σ .

мелкомасштабные отклонения от фона, автокорреляционная функция оказывается значительно менее чувствительной.

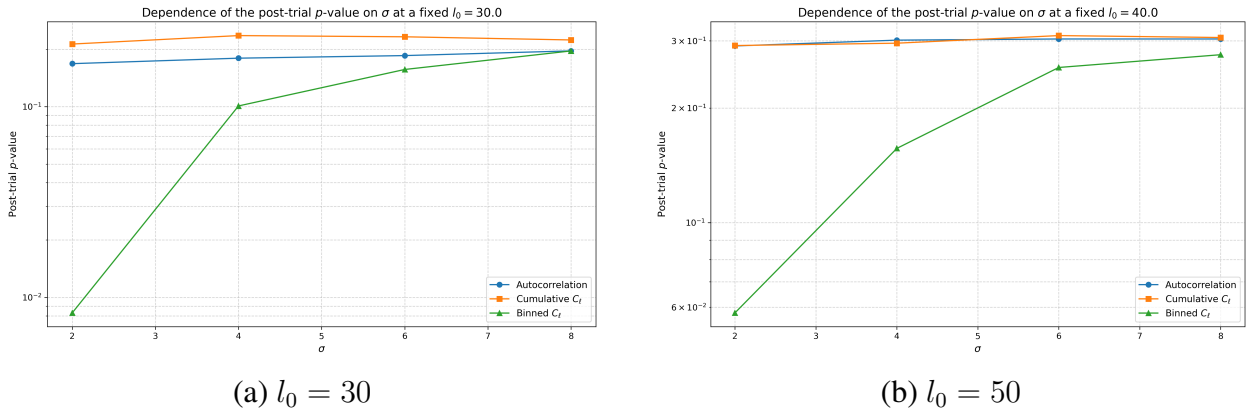


Рис. 3: Сравнение автокорреляционной функции и спектра мощности для модели из уравнения (19) при различных значениях σ и фиксированном l_0 .

Основной вывод в это случае заключается в том, что в рамках модели, характеризующейся одиночным изолированным мультиполем на средних масштабах, автокорреляционная функция оказывается более чувствительной, чем спектр мощности, однако демонстрирует существенно более низкую чувствительность на меньших угловых масштабах. Более того, учитывая кумулятивную природу применяемой нами автокорреляционной функции, предположение о более высокой чувствительности аналогичной кумулятивной метрики для C_l , которая, как интуитивно ожидалось, должна накапливать избытки на каждом из масштабов l , не подтвердилось. В контексте данной конкретной модели такой результат является вполне закономерным, поскольку подобное накопление лишь усугубляет размытие изолированной моды в спектре мощности. Отметим, что данная модель является наиболее игрушечной и не отражает того, что ожидается для распределения космических лучей.

2. Модель турбулентной диффузии.

В качестве физически обоснованной модели для мелко- и среднемасштабной анизотропии мы используем модель турбулентной диффузии М.Алерса [6]. В рамках этой модели рассеяние космических лучей в локальном турбулентном магнитном поле перераспределяет крупномасштабную дипольную анизотропию на меньшие угловые

масштабы. Как следствие, этот турбулентный каскад описывается следующим угловым спектром мощности (см. рис. 4):

$$C_\ell = \frac{1}{(2\ell + 1)(\ell + 1)(\ell + 2)}. \quad (20)$$

Для данной модели задано значение $\epsilon = 0.3$ в уравнении (18).

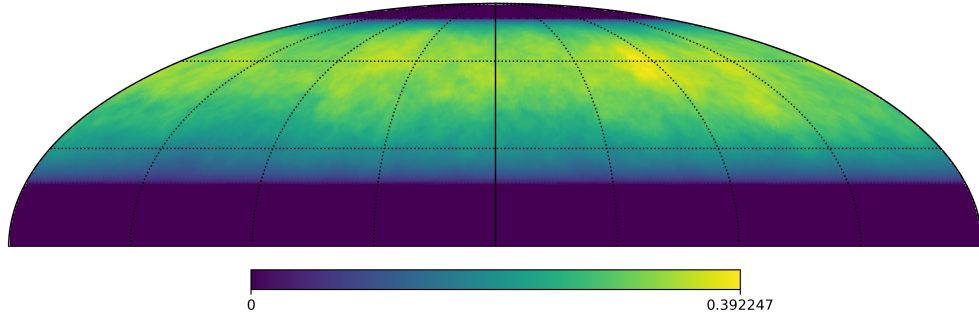


Рис. 4: Карта интенсивности с учетом экспозиции детектора и спектром мощности, заданным уравнением (20).

В данной модели также сильно доминируют низкие мультиполи, что делает её сопоставимой с предыдущей моделью на средних угловых масштабах. Как следствие, полученные медианные значения *post-trial p-value* оказались вполне ожидаемыми:

Таблица 1: Сравнение медианных значений *post-trial p-value* для модели (20).

Метод	Медианное <i>post-trial p-value</i>
Автокорреляционная функция	0.0011
Биннированный спектр мощности	0.0061
Кумулятивный спектр мощности	0.1162

3. Модель гауссового источника.

Последней рассмотренной нами моделью стала модель гауссового источника, то есть одиночного источника с гауссовым размытием:

$$f(\vec{n}) = \exp\left(-\frac{\psi^2(\vec{n}, \vec{n}_0)}{2\sigma^2}\right), \quad (21)$$

где $\psi(\vec{n}, \vec{n}_0)$ — угловое расстояние между произвольным направлением прихода \vec{n} и направлением на центр источника \vec{n}_0 , а σ характеризует угловой размер (размытие) источника. В данном случае уровень

анизотропии $\epsilon = 0.25$ в уравнении (18). Эта модель также описывает одну из физически возможных моделей анизотропии. В рамках данной модели предполагалось, что в поле зрения детектора находится близкий источник, угловой размер которого определяется параметром σ (см. рис. 5).

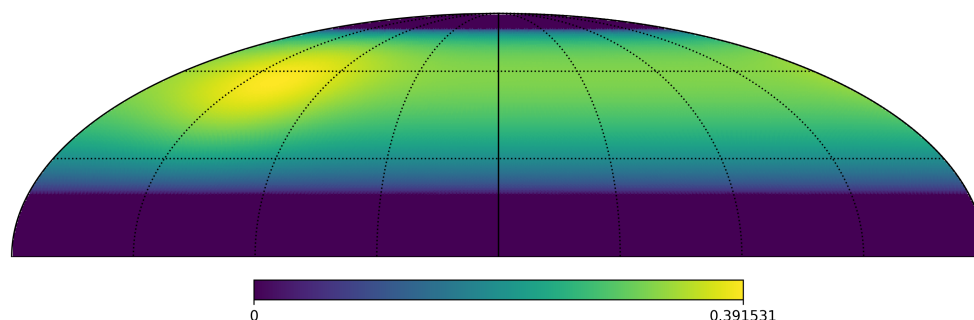


Рис. 5: Карта интенсивности для модели гауссового источника с учетом экспозиции детектора ($\sigma = 20$, $\alpha = 120$, $\delta = 50$).

Анализ данной модели при различных угловых размерах источника показал, что спектр мощности абсолютно нечувствителен к этому типу анизотропии (см. рис. 6). Более того, сигнал от гауссового источника распределяется по широкому диапазону мультипольных мод l . Хотя интуитивно ожидалось, что этот эффект проявится в кумулятивном спектре мощности, он не продемонстрировал высокой статистической значимости, что свидетельствует о его ограниченной чувствительности практически к любому типу анизотропии по сравнению с двумя другими методами. Также важно отметить, что, как и в случае с мелкомасштабной анизотропией в модели гауссового спектра мощности, автокорреляционная функция оказывается значительно менее чувствительной к структурам на малых угловых масштабах (порядка $4^\circ - 10^\circ$), чем на средних ($12^\circ - 20^\circ$).

Таким образом, мы проанализировали чувствительность двух основных методов на примере нескольких базовых моделей анизотропии и, что наиболее важно, в рамках некоторых физически обоснованных моделей. Ключевым результатом стала сравнительно высокая чувствительность автокорреляционной функции к различным типам анизотропии, что подчеркивает эффективность данного подхода для подобного анализа. Кроме того, принципиально важный вывод следует из сравнения с предложенным

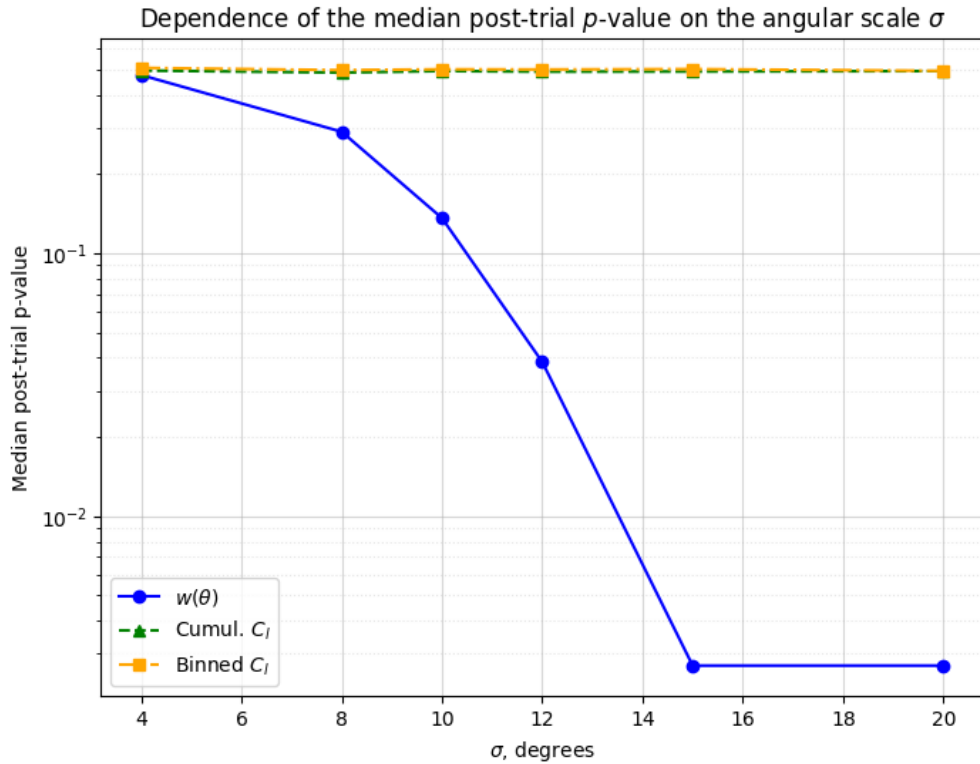


Рис. 6: Сравнение автокорреляционной функции и спектра мощности для модели гауссового источника при различных значениях углового размера σ .

кумулятивным спектром мощности. Хотя изначально предполагалось, что эта метрика повысит чувствительность метода спектра мощности за счет накопления незначительных избытков по всем мультипольным модам ℓ , на практике она оказалась существенно менее чувствительной. И, что, пожалуй, еще более важно — её итоговые результаты трудно поддаются физической интерпретации.

3 Эксперимент, данные и Монте-Карло

Рассмотренные выше подходы были применены к архивным данным эксперимента KASCADE [16]. Экспериментальная установка для регистрации широких атмосферных ливней KASCADE функционировала с 1996 по 2013 год на территории кампуса КИТ в Карлсруэ, Германия (49° с.ш., 8.4° в.д., 110 м над уровнем моря). В ходе эксперимента проводилась регистрация широких атмосферных ливней в диапазоне энергий первичных частиц приблизительно от 500 ТэВ до 100 ПэВ. Хотя сбор данных в KASCADE осуществлялся в нескольких конфигурациях, в данной работе мы сосредотачиваемся

исключительно на основной установке KASCADE. Эта установка состояла из 252 сцинтилляционных детекторов, образующих прямоугольную сетку на площади $200 \times 200 \text{ m}^2$. Внешние 192 детектора были оснащены экранирующим слоем, что позволяло отдельно регистрировать электромагнитную и мюонную компоненты атмосферных ливней.

Экспериментальные данные и данные Монте-Карло, используемые в данном исследовании, были предоставлены сервисом KCDC [17]. Каждое событие включает интегрированные по времени сигналы электромагнитной и мюонной компонент ШАЛ от станций установки KASCADE, а также восстановленные параметры: первичную энергию (E), зенитный угол (θ), азимутальный угол (ϕ), положение оси ливня (x, y), число электронов (N_e), число мюонов (N_μ) и возраст ливня (s). Более подробное описание этих характеристик приведено в работе [18]. Значения N_e , N_μ и s определяются путем аппроксимации функции пространственного распределения плотностей частиц с помощью модифицированной функции NKG [18]. Энергия E восстанавливается с помощью стандартных алгоритмов KASCADE с учетом как N_e , так и N_μ , скорректированных на ослабление в атмосфере в зависимости от θ (подробнее см. [18]). Разрешение по энергии E составляет около 11% (в терминах десятичного логарифма отношения смоделированной энергии к восстановленной) для Монте-Карло событий, сгенерированных на основе модели адронного взаимодействия QGSJet-II.04 и прошедших критерии отбора по качеству в исследуемом диапазоне энергий.

Данное исследование является продолжением работы по анализу массового состава галактических космических лучей с использованием данных эксперимента KASCADE [3], в которой на основе Монте-Карло симуляций, предоставленных сервисом KCDC, были обучены различные модели машинного обучения и нейронные сети для классификации событий по типу первичной частицы в рамках различных моделей адронного взаимодействия. Наилучшую эффективность продемонстрировала свёрточная нейронная сеть. На рисунке 7 представлена матрица смешивания для данной модели. Из её структуры ясно, что классифицированные выборки для конкретных массовых групп не являются абсолютно чистыми, так как они представляют собой совокупность доминирующего целевого типа частиц и примеси других типов.

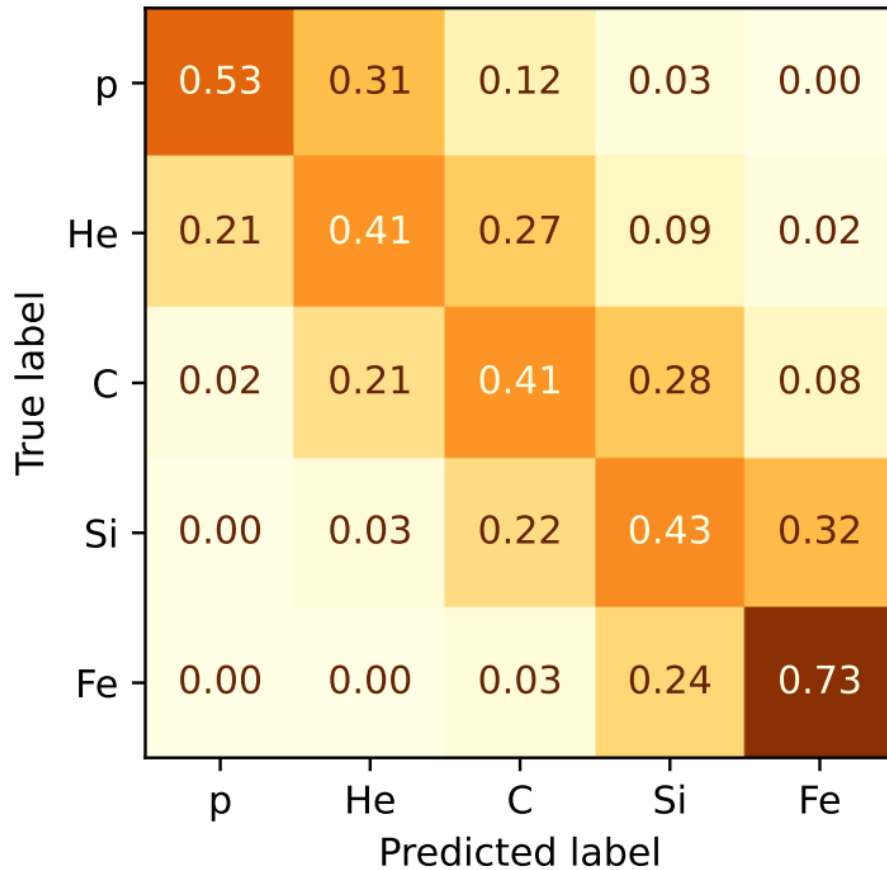


Рис. 7: Матрица смешивания свёрточной нейронной сети, обученная и протестированная на Монте-Карло с генератором адронных взаимодействий QGSJet-II.04. [3]

В настоящей работе, помимо рассмотрения различных сигнатур для анализа анизотропии, мы применяем их для оценки анизотропии внутри каждой выделенной массовой группы. Для выбора оптимальных параметров и самих сигнатур используется unblind-набор, составляющий 10% от общего объема данных. Эти события были классифицированы с помощью свёрточной нейронной сети, предварительно обученной на наборах Монте-Карло, сгенерированных с использованием адронной модели QGSJet-II.04.

Как отмечалось ранее в разделе, посвященном экспозиции, анализ эффективности и распределения по зенитному углу (см. рис. 8,9) показывает, что экспозиция детектора не является строго геометрической, в частности в бинах относительно низких энергий и при зенитных углах $\theta < 30^\circ$. Кроме того, наблюдаются суточные вариации, что обуславливает необходимость использования методов восстановления экспозиции. Поэтому в данной работе для оценки экспозиции детектора применяется метод

временного перемешивания. В рамках данного подхода создаётся выборка путём сопоставления случайно перемешанных времен прихода событий с изначальными направлениями прибытия в локальной системе координат. Такая процедура повторяется огромное количество раз и позволяет в итоге сформировать фоновую выборку, объём которой значительно превышает число реальных событий. Искусственные события уже в экваториальной системе координат наносятся на карту, которая затем нормируется. В результате временного перемешивания получается эталонная карта изотропного фона, которая учитывает реальные условия эксперимента.

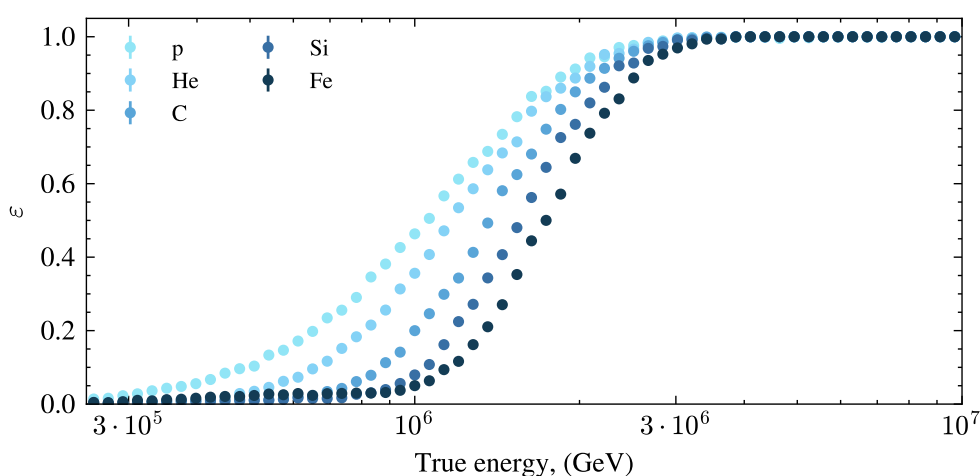


Рис. 8: Зависимость эффективности детектора от энергии для различных типов частиц. [19]

Для построения и анализа карт небесной сферы использовался программный пакет HEALPix, а именно его реализация на языке Python – библиотека healpy [20, 21]. Параметр разрешения N_{side} был задан равным 128, что соответствует 196 608 пикселям. С помощью метода временного перемешивания из анализируемого набора данных в общей сложности было сэмплировано 500 000 000 событий. Такой значительный размер эталонной выборки позволяет минимизировать статистический (пуассоновский) шум фоновой карты. Пример одной из карт представлен на рис. 10

Оценка анизотропии проводилась для каждого выделенного типа частиц в открытых энергетических интервалах, определяемых порогами: $(\lg(E/\text{eV}) > \{15.15, 15.25, 15.5, 15.75, 16.0, 16.25, 16.5\})$.

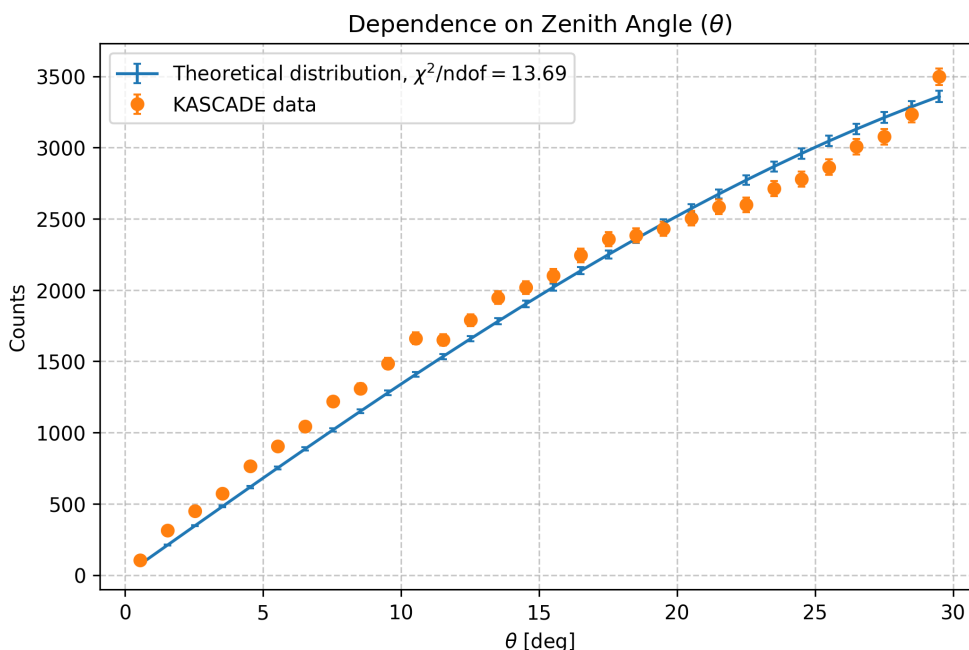


Рис. 9: Распределение по зенитному углу в данных KASCADE для железа (Fe) при $\lg(E/\text{eV}) > 15.15$. Теоретическое распределение соответствует $dN/d \cos \theta \propto \cos \theta$.

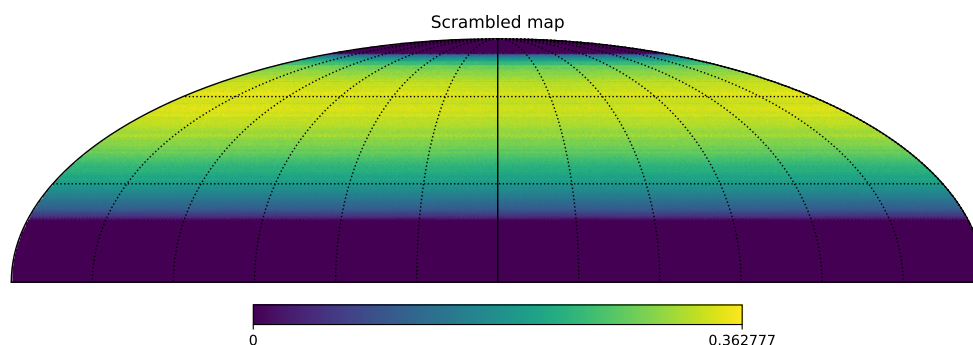


Рис. 10: Карта относительной экспозиции, полученная методом временного перемешивания для протонов с энергией $\lg(E/\text{eV}) > 15.15$.

4 Анализ и результаты

4.1 Анализ крупномасштабной анизотропии

Одномерный анализ для исследования крупномасштабной анизотропии (7) был выполнен для солнечного, звёздного и антизвёздного времён. Это позволяет оценить перетекание дипольной компоненты, возникшей из-за суточных вариаций в физическую компоненту, оцениваемую по звёздному времени.

Однако анализ unblind-набора данных не показал статистически значимых

отклонений от изотропии ни для одной из массовых групп первичных частиц на всех рассматриваемых интервалах энергий (см. рис. 11, 12). Наименьшее значение p -value для звездного времени составило $p_{sid} = 0.046$ для протонов при $\lg(E/\text{eV}) > 15.15$, но это значение всё ещё не указывает на присутствие анизотропии. Полные результаты анализа для каждого типа первичной частицы и энергетического порога приведены в приложении В.

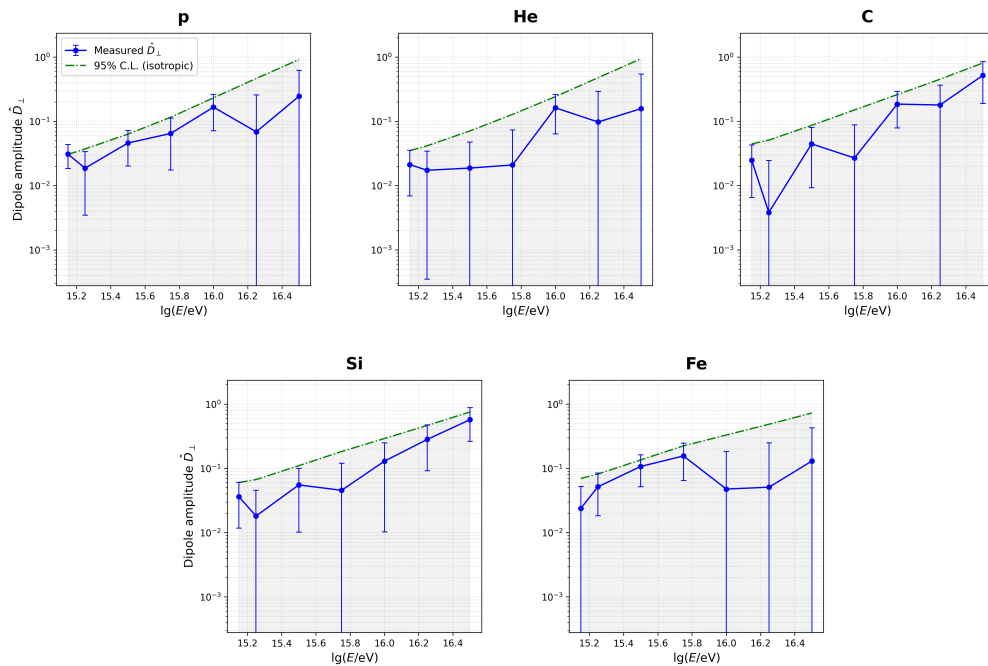


Рис. 11: Значения поперечной дипольной компоненты для различных типов частиц и интервалов энергий. Серой областью обозначены амплитуды диполя, соответствующие статистической значимости отклонения от изотропного распределения менее 2σ .

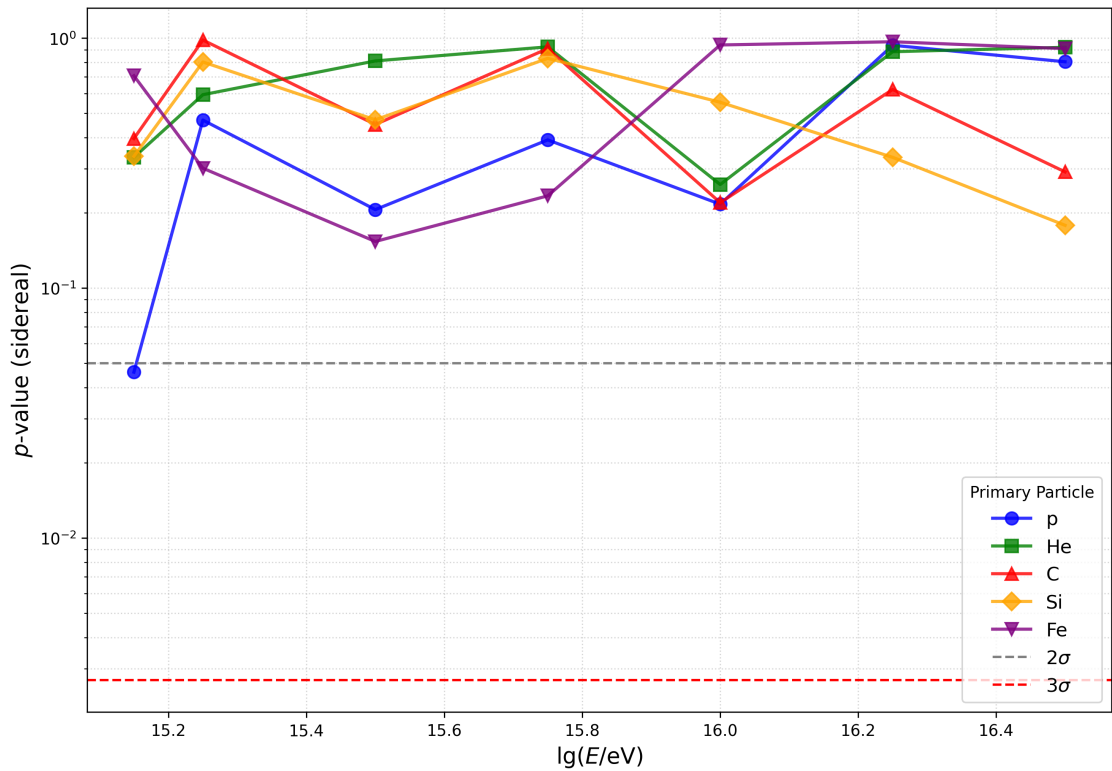


Рис. 12: Значения p -value, полученные с использованием метода Восток-Запад, для различных типов частиц и интервалов энергий.

4.2 Автокорреляционный анализ

Анализ анизотропии unblind-набора данных, выполненный с применением автокорреляционного подхода (11) для каждого типа первичных частиц и различных открытых интервалов энергий, также не выявил значимых отклонений от изотропии, за исключением железа (Fe) при энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$ (см. рис. 13), где минимальное значение post-trial p -value составило 0.0053, что соответствует угловому масштабу $\approx 10^\circ$. Результаты для самой автокорреляционной функции и pre-trial значимости для Fe представлены более детально на рис. 14 и 15.

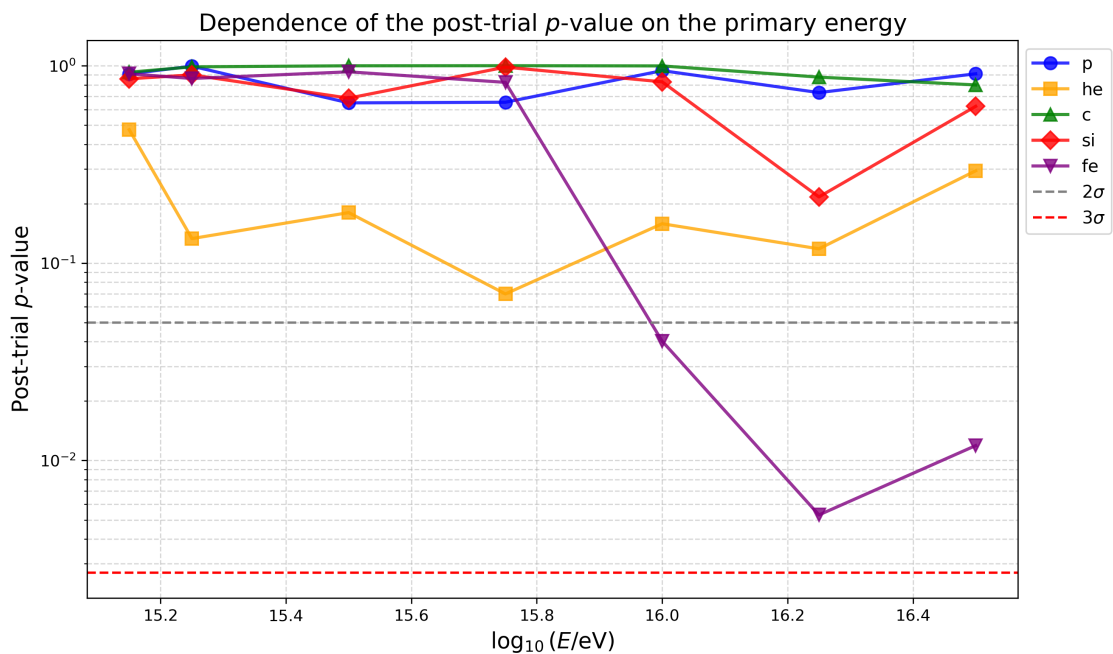


Рис. 13: Значения post-trial p -value, полученные методом автокорреляции для различных типов первичных частиц и интервалов энергий.

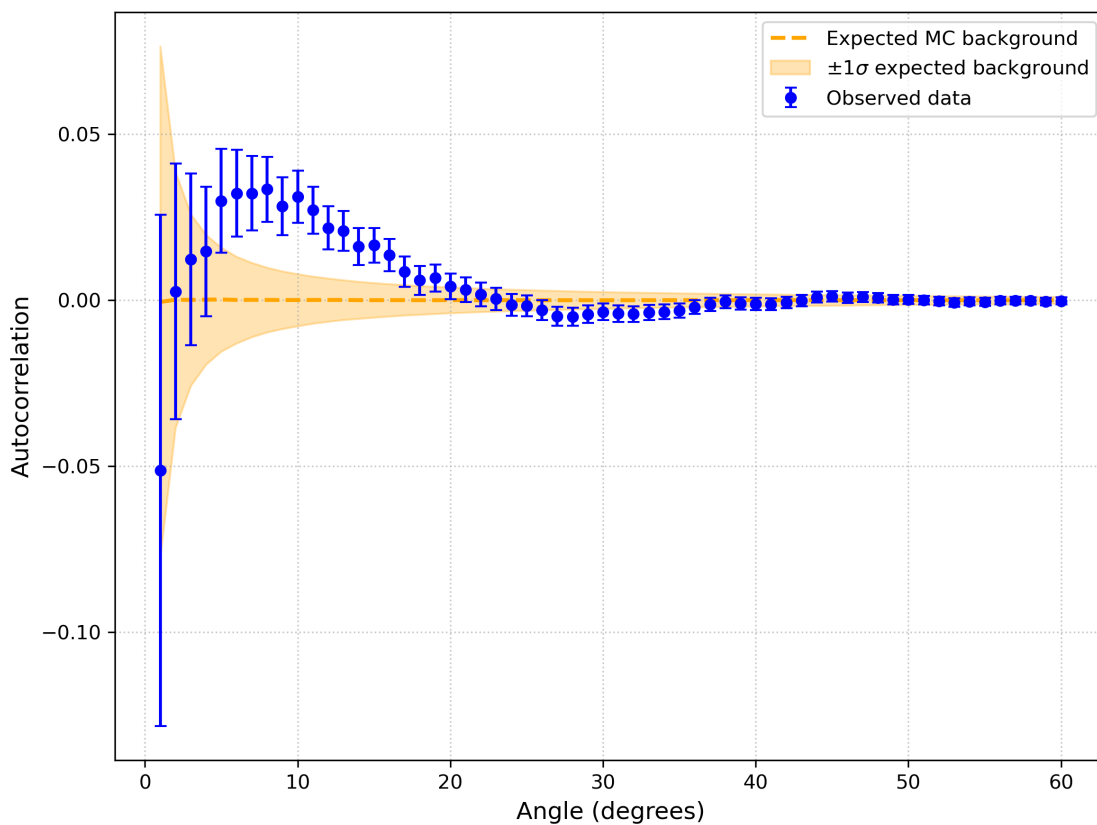


Рис. 14: Автокорреляционная функция для Fe при энергиях $\lg(E/eV) > 16.25$.

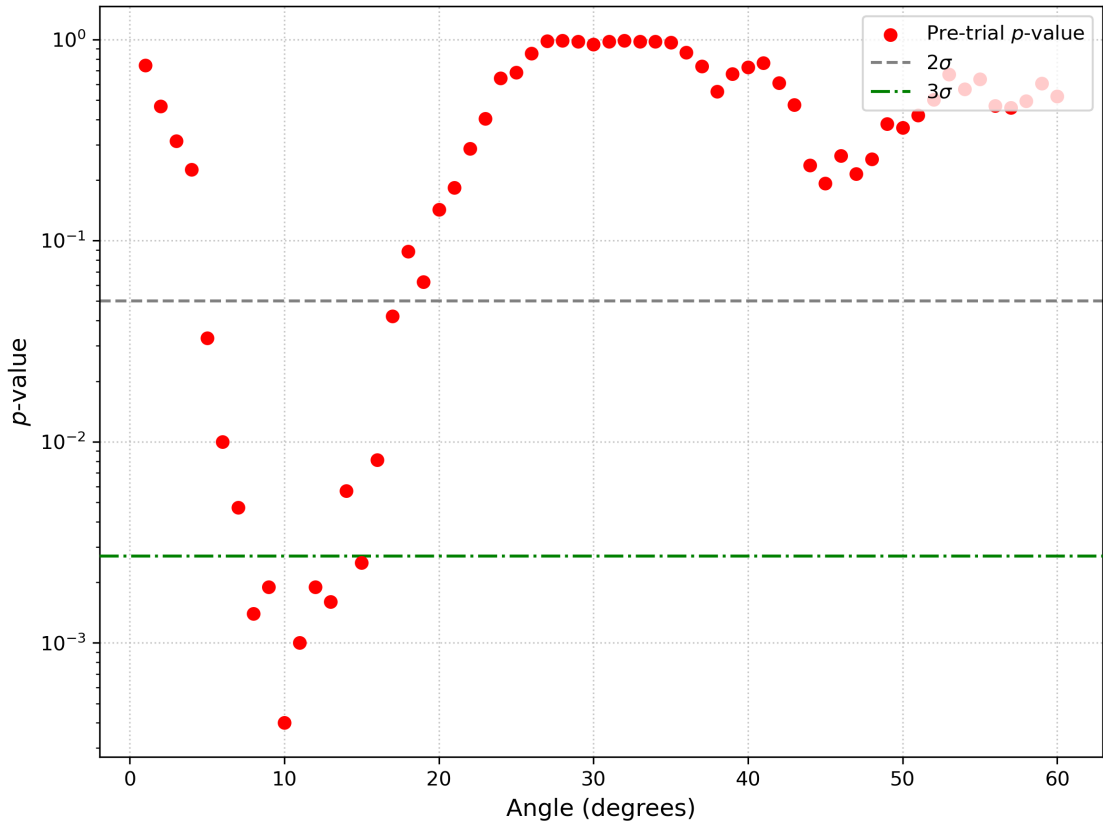


Рис. 15: Значения pre-trial p -value, полученные методом автокорреляции для Fe при энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$.

4.3 Мультипольный анализ

При анализе анизотропии методом спектра мощности пришлось отказаться от предложенной кумулятивной формы (17) и рассматривался исключительно вариант с биннированием. Как и в автокорреляционном подходе, для большинства типов частиц в различных интервалах энергий не было выявлено значимых отклонений от изотропии. Исключением стали ядра железа (Fe) при тех же энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$ и $\lg(E/\text{eV}) > 16.5$, для которых значения post-trial p -value составили 0.0093 и 0.0119 соответственно, а также кремний (Si) при $\lg(E/\text{eV}) > 16.5$ со значением post-trial p -value, равным 0.0162 (см. рис. 16). Аналогично автокорреляционному анализу, значения pre-trial значимости и сам спектр мощности для Fe при энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$ более подробно представлены на рис. 17 и 18.

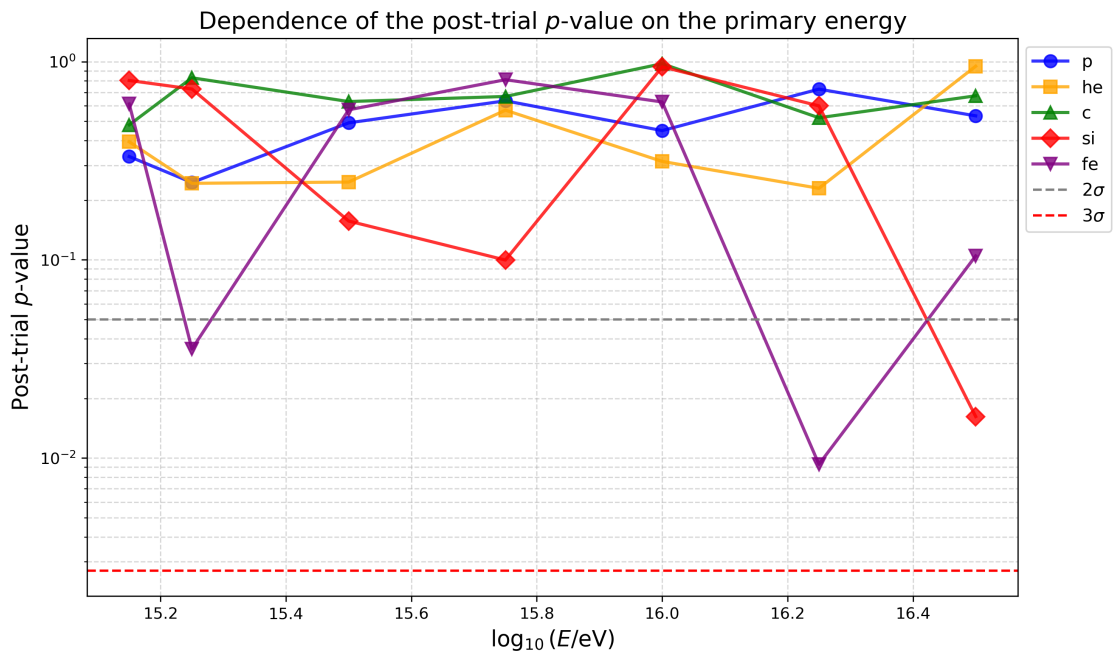


Рис. 16: Значения post-trial p -value, полученные методом спектра мощности для различных типов первичных частиц и интервалов энергий.

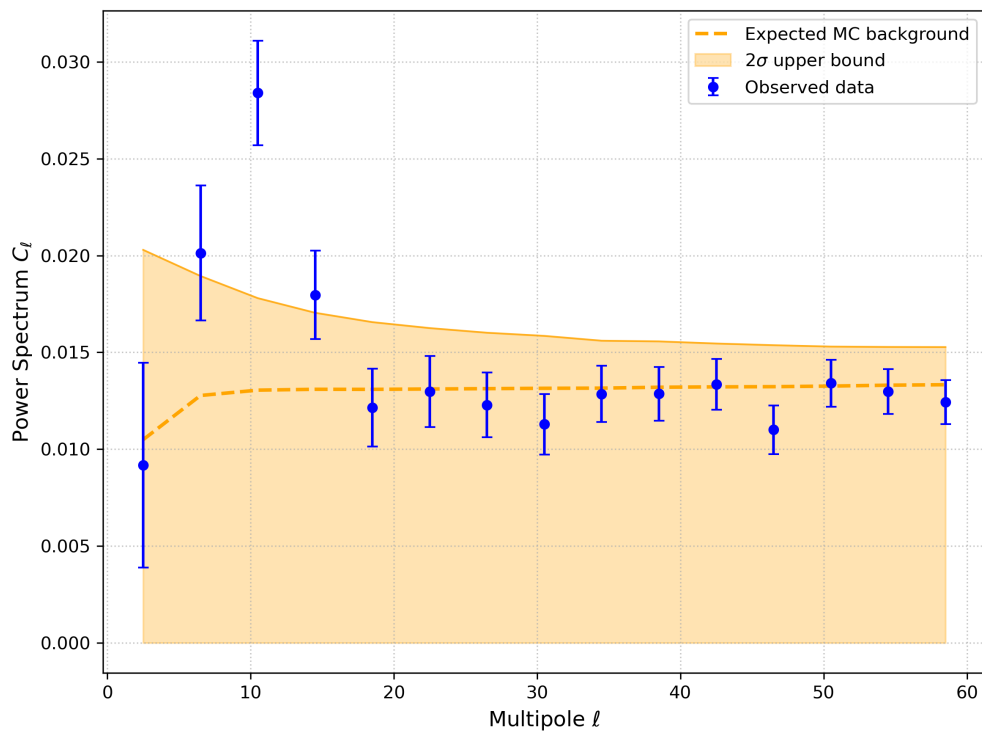


Рис. 17: Спектр мощности для Fe при энергиях $\lg(E/eV) > 16.25$.

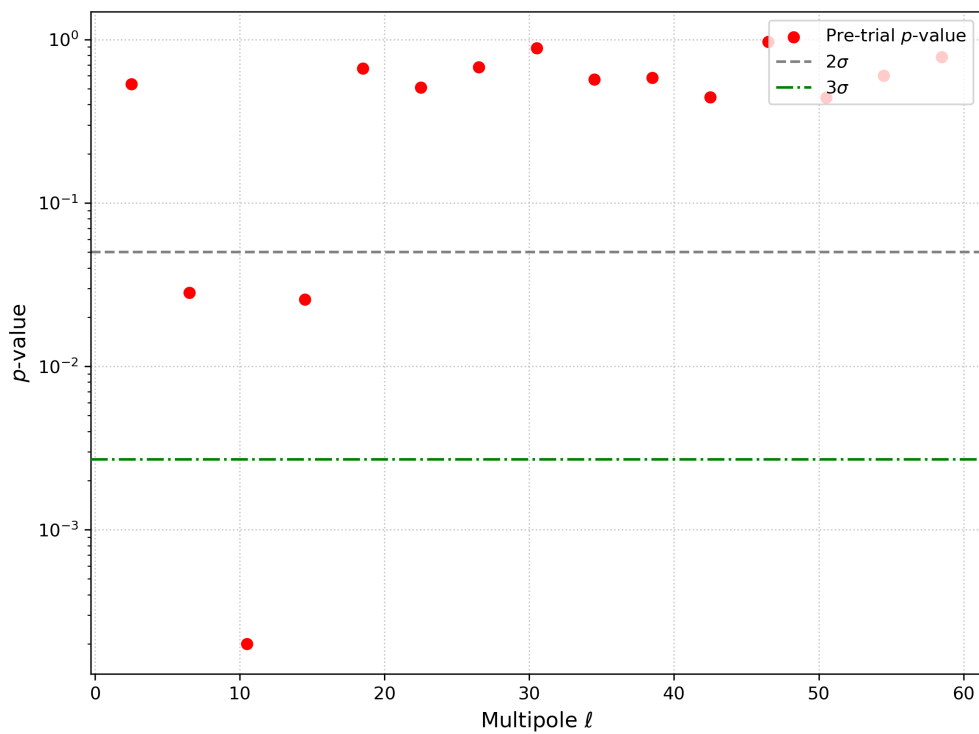


Рис. 18: Значения pre-trial p -value, полученные методом спектра мощности для Fe при энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$.

ВЫВОДЫ

Важным методологическим итогом работы стало сравнение чувствительности автокорреляционной функции и углового спектра мощности на post-trial уровне. На основе генерации изотропных Монте-Карло наборов и симуляции различных физических моделей (гауссов спектр мощности, турбулентная диффузия, одиночный источник с гауссовым размытием) было показано, что для реалистичных сценариев диффузной анизотропии метод автокорреляции демонстрирует более высокую статистическую чувствительность. Попытка повысить чувствительность спектра мощности за счет кумулятивной метрики не привела к ожидаемому результату, показав её неэффективность из-за накопления статистического шума.

Анализ unblind-набора данных, составляющего 10% от всей статистики эксперимента KASCADE, показал результаты совместимые с изотропией почти для всех типов первичных частиц как в случае крупномасштабной, так и в случае средне- и мелкомасштабной анизотропии. Однако заметным исключением стало железо (Fe) при энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$, которое демонстрирует отклонения от изотропии как в угловом спектре мощности, так и в автокорреляционной функции на угловых масштабах порядка 10° . Основываясь на нашем анализе этих двух сигнатур и предполагая физическую природу данной анизотропии, это может указывать на наличие некоторой внутренней регулярной структуры на этом масштабе, аналогичной той, что рассматривалась в модели гауссового спектра мощности, и на отсутствие анизотропии вида турбулентной диффузионной модели и модели гауссового источника.

Также важно отметить, что результат, как могло бы показаться, не зависит от магнитной жесткости $R \approx E/Ze$. Однако для железа(Fe) при

энергиях $\lg(E/\text{eV}) > 16.25$ магнитная жесткость составляет $eR \approx 0.68 \text{ PeV}$, что соответствует эквивалентным энергетическим порогам $\lg(E/\text{eV}) > 14.83$, $\lg(E/\text{eV}) > 15.13$, $\lg(E/\text{eV}) > 15.61$ и $\lg(E/\text{eV}) > 16.03$ для протонов, гелия(He), углерода(C) и кремния(Si) соответственно. Для протонов и гелия анизотропия на этих масштабах энергий не анализировалась. В то же время сигналы для углерода и кремния могут быть подавлены из-за эффекта смешивания типов частиц, связанных с классификацией первичных частиц на данных энергиях — в частности, смешивания с протонами и гелием в случае углерода, и с железом в случае кремния. Тем не менее, для более полной и надежной интерпретации необходимо провести аналогичные вычисления на полном наборе данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование методов для поиска анизотропии космических лучей в случае ограниченной видимости детектора, а также их сравнительный анализ чувствительности. В результате чего было проведено исследование анизотропии по направлениям прихода космических лучей для всех угловых масштабов с использованием архивных данных наземного эксперимента KASCADE. Ключевой особенностью данного исследования стал анализ отдельных массовых групп (протоны, ядра гелия, углерода, кремния и железа), которые были выделены с помощью современных методов машинного обучения, а именно свёрточных нейронных сетей.

Направлением дальнейших исследований является применение разработанной методологии к полному набору экспериментальных данных KASCADE. Это позволит окончательно подтвердить или отвергнуть природу обнаруженного среднemasштабного сигнала для железа, возможно приблизив нас к пониманию локальной магнитной структуры нашей Галактики.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность и признательность моему научному руководителю, д.ф.-м.н. Кузнецову Михаилу Юрьевичу, за неоценимую помощь в исследованиях и наставления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение А. Сравнение оценок автокорреляции

В данном приложении представлен сравнительный анализ оценок автокорреляционной функции через пары событий – Landy-Szalay и наивная оценка. На рисунке 1 представлено среднее значение автокорреляционной функции по $N_{it} = 10000$ реализациям изотропного фона, соответствующего геометрической экспозиции детектора, по $N_{ev} = 10000$ событий в каждом. Несложно заметить, что значения автокорреляционной функции, посчитанные через наивную оценку, имеют некоторое систематическое отклонение от нуля (ввиду изотропности распределения, реальное значение соответствует нулю автокорреляционной функции) в отличие от оценки Landy-Szalay. Кроме того важно отметить значительную разницу в дисперсии на больших угловых масштабах. Таким образом, наивная оценка оказывается менее пригодной для анализа анизотропии при ограниченной видимости детектора.

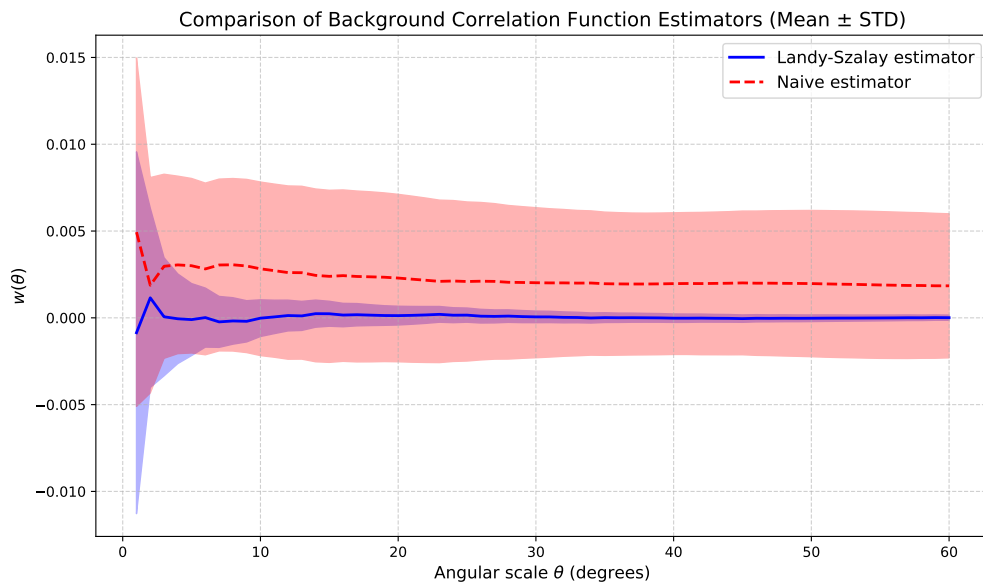


Рис. 1: Значение автокорреляционной функции для изотропного набора.

Приложение В. Полные результаты анализа крупномасштабной анизотропии

В данном приложении представлена сводная таблица результатов анализа крупномасштабной анизотропии, выполненного с помощью метода Восток-Запад. Столбцы таблицы определены следующим образом: $\lg(E_{threshold}/\text{eV})$ — логарифм пороговой энергии для открытого энергетического интервала; Type обозначает тип первичной частицы; N_{ev} — количество событий в заданном интервале энергий для данного типа первичной частицы; D_{sid} — амплитуда поперечной дипольной компоненты вместе с её статистической погрешностью; p_{sid} — значение p -value, связанное с этим дипольным моментом; α_{sid} — прямое восхождение, определяющее ориентацию диполя; p_{sol} и p_{anti} соответствуют значениям p -value, рассчитанным для солнечного и антивзвёздного времени соответственно.

Таблица 1: Результаты анализа крупномасштабной анизотропии.

$\lg(E_{threshold}/\text{eV})$	Type	N_{ev}	D_{sid}	P_{sid}	α_{sid}	P_{sol}	P_{anti}
15.15	p	288286	0.0310 ± 0.0125	0.046096	1.863743	0.717431	0.512394
15.15	He	221074	0.0212 ± 0.0143	0.333512	3.693439	0.916242	0.117411
15.15	C	146927	0.0248 ± 0.0182	0.396568	3.578642	0.971199	0.610219
15.15	Si	86596	0.0362 ± 0.0246	0.336615	4.190485	0.850159	0.204545
15.15	Fe	57604	0.0237 ± 0.0285	0.707389	2.019740	0.134025	0.198177
15.25	p	192877	0.0187 ± 0.0152	0.470276	1.397537	0.664114	0.452455
15.25	He	153137	0.0173 ± 0.0170	0.594084	4.184296	0.537729	0.510074
15.25	C	104543	0.0038 ± 0.0209	0.983370	2.754421	0.918504	0.759625
15.25	Si	63714	0.0181 ± 0.0273	0.803262	3.349300	0.627418	0.490791
15.25	Fe	40901	0.0516 ± 0.0333	0.301775	1.470342	0.378547	0.644344
15.50	p	66059	0.0460 ± 0.0259	0.206064	1.267407	0.103418	0.984403
15.50	He	53048	0.0187 ± 0.0290	0.811135	-0.040274	0.282382	0.174158
15.50	C	35701	0.0446 ± 0.0354	0.451475	3.556771	0.645110	0.735660
15.50	Si	22441	0.0552 ± 0.0450	0.471475	4.043787	0.459306	0.240209
15.50	Fe	14405	0.1069 ± 0.0552	0.153621	1.688807	0.171693	0.113483
15.75	p	19256	0.0648 ± 0.0473	0.391744	0.915830	0.659327	0.755492
15.75	He	16456	0.0209 ± 0.0524	0.923398	2.849511	0.454917	0.381597
15.75	C	12050	0.0268 ± 0.0614	0.908997	-0.545788	0.914094	0.661769
15.75	Si	8162	0.0455 ± 0.0747	0.830430	2.893656	0.938760	0.414082
15.75	Fe	5433	0.1559 ± 0.0914	0.233942	2.422586	0.016541	0.175222
16.00	p	4756	0.1661 ± 0.0950	0.216602	0.624412	0.006405	0.180467
16.00	He	4582	0.1625 ± 0.0990	0.259683	2.618850	0.292894	0.090805
16.00	C	4061	0.1853 ± 0.1064	0.219690	3.198524	0.597920	0.755842
16.00	Si	3222	0.1292 ± 0.1189	0.554185	2.417204	0.236482	0.637527
16.00	Fe	2501	0.0476 ± 0.1348	0.939615	-0.716797	0.055944	0.530602
16.25	p	1154	0.0687 ± 0.1901	0.936861	0.635771	0.730248	0.727002
16.25	He	1175	0.0976 ± 0.1956	0.882986	4.253031	0.572914	0.327199
16.25	C	1363	0.1796 ± 0.1848	0.623539	4.503552	0.779746	0.529958
16.25	Si	1281	0.2820 ± 0.1903	0.333635	0.932633	0.470242	0.113499
16.25	Fe	1149	0.0509 ± 0.1987	0.967740	0.327158	0.366334	0.213675
16.50	p	303	0.2464 ± 0.3739	0.804892	2.236320	0.745714	0.851769
16.50	He	316	0.1574 ± 0.3846	0.919661	3.858541	0.978926	0.107081
16.50	C	443	0.5195 ± 0.3310	0.291712	-0.457492	0.335775	0.448615
16.50	Si	497	0.5722 ± 0.3081	0.178309	0.987905	0.406955	0.002472
16.50	Fe	486	0.1300 ± 0.2965	0.908332	-0.560046	0.177064	0.295545

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stefano Gabici, Carmelo Evoli, Daniele Gaggero, Paolo Lipari, Philipp Mertsch, Elena Orlando, Andrew Strong, and Andrea Vittino. The origin of galactic cosmic rays: Challenges to the standard paradigm. *International Journal of Modern Physics D*, 28(15):1930022, Nov 2019.
2. Zhen Cao et al. Ultrahigh-energy photons up to 1.4 petaelectronvolts from 12 γ -ray Galactic sources. *Nature*, 594(7861):33–36, 2021.
3. M. Yu. Kuznetsov, N. A. Petrov, I. A. Plokhikh, and V. V. Sotnikov. Methods of machine learning for the analysis of cosmic rays mass composition with the KASCADE experiment data. *JINST*, 19(01):P01025, 2024.
4. R. Abbasi et al. Observation of anisotropy in the arrival directions of galactic cosmic rays at multiple angular scales with icecube. *The Astrophysical Journal*, 740(1):16, sep 2011.
5. A. U. Abeysekara et al. Observation of small-scale anisotropy in the arrival direction distribution of tev cosmic rays with hawc. *The Astrophysical Journal*, 796(2):108, Nov 2014.
6. Markus Ahlers. Anomalous anisotropies of cosmic rays from turbulent magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, 112:021101, Jan 2014.
7. Markus Ahlers and Philipp Mertsch. Small-scale anisotropies of cosmic rays from relative diffusion. *The Astrophysical Journal*, 815(1):L2, Dec 2015.
8. Paul Sommers. Cosmic ray anisotropy analysis with a full-sky observatory. *Astroparticle Physics*, 14(4):271–286, Jan 2001.
9. D.E. Alexandreas, D. Berley, S. Biller, G.M. Dion, J.A. Goodman, T.J. Haines, C.M. Hoffman, E. Horch, X.-Q. Lu, C. Sinnis, G.B. Yodh, and W. Zhang.

- Point source search techniques in ultra high energy gamma ray astronomy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 328(3):570–577, 1993.
10. John Linsley. Fluctuation effects on directional data. *Phys. Rev. Lett.*, 34:1530–1533, 1975.
 11. R. Bonino, V. V. Alekseenko, O. Deligny, P. L. Ghia, M. Grigat, A. Letessier-Selvon, H. Lyberis, S. Mollerach, S. Over, and E. Roulet. The East-West method: an exposure-independent method to search for large scale anisotropies of cosmic rays. *Astrophys. J.*, 738:67, 2011.
 12. P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. 1980.
 13. Stephen D. Landy and Alexander S. Szalay. Bias and Variance of Angular Correlation Functions. *Astrophys. J.*, 412:64, jul 1993.
 14. Gayoung Chon, Anthony Challinor, Simon Prunet, Eric Hivon, and István Szapudi. Fast estimation of polarization power spectra using correlation functions. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 350(3):914–926, may 2004.
 15. István Szapudi, Simon Prunet, Dmitry Pogosyan, Alexander S. Szalay, and J. Richard Bond. Fast Cosmic Microwave Background Analyses via Correlation Functions. *Astrophys. J. Lett.*, 548(2):L115–L118, feb 2001.
 16. T. Antoni et al. Cascade measurements of energy spectra for elemental groups of cosmic rays: Results and open problems. *Astroparticle Physics*, 24(1–2):1–25, sep 2005.
 17. A. Haungs et al. The cascade cosmic-ray data centre kcdc: granting open access to astroparticle physics research data. *The European Physical Journal C*, 78(9), sep 2018.
 18. J. Wochele, D. Kang, D. Wochele, A. Haungs, and S. Schoo. Kcdc user manual: Open access solution for the cascade. KASCADE Cosmic-ray Data Centre (KCDC), 2013.
 19. Никита Александрович Петров. *Исследование состава космических лучей в диапазоне энергий 1,5–100 ПэВ на архивных данных эксперимента*

KASCADE с использованием машинного обучения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт ядерных исследований РАН (ИЯИ РАН), Москва, 2025.

20. K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann. Healpix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere. *The Astrophysical Journal*, 622(2):759, apr 2005.
21. Andrea Zonca, Leo P. Singer, Daniel Lenz, Martin Reinecke, Cyrille Rosset, Eric Hivon, and Krzysztof M. Gorski. healpy: equal area pixelization and spherical harmonics transforms for data on the sphere in python. *Journal of Open Source Software*, 4(35):1298, 2019.