Нерешенные проблемы квантовой теории поля

Максим Валентинович Либанов

Институт ядерных исследований РАН

Классическая механика

✏ Пусть требуется описать динамику N частиц. Каждая частица характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_n(t)$ и массой m_n, $n = 1, \ldots, N$ ➪ Законы Ньютона ➪ уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(m_n \frac{d}{dt}\vec{r}_n\right) = \vec{F}_n(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \overset{\text{пот. силы}}{=} -\frac{\partial V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)}{\partial \vec{r}_n} \tag{1}$$

✓ Дифференциальные уравнения 2-го порядка ➪ нужны начальные условия:

$$\vec{r}_n(t_0) = \vec{r}^{\,0}, \quad \dot{\vec{r}}_n(t_0) = \vec{v}_n^{\,0} \tag{2}$$

✓ Система (1), (2) позволяет однозначно определить состояние системы $\mathscr{R}(t) = \{\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_N(t)\}$ ➪ классический детерминизм

NB: Другой взгляд: решая (1), (2), требуется найти алгоритм (оператор) $U(t, t_0)$:

$$\mathscr{R}(t) = U(t, t_0)\mathscr{R}(t_0)$$

В классической механике U -- нелинейный.

✏ Уравнения (1), (2) описывают систему с $d \cdot N = 3N$ степенями свободы (функций, полностью характеризующих систему), ($d = 3$ -- число измерений). Далее для простоты $N = 1$, $d = 1$.

Результат

Траектория Фазовый портрет

Классическая механика. Альтернативный подход.

Принцип наименьшего действия

- Уравнения (1) можно решать, задавая вместо начальных условий (2), граничные:

$$r(t_0) = r^0, \quad r(t_1) = r^1 \tag{3}$$

- Решив такую задачу, мы найдем скорость, которой должна обладать частица в момент t_0, чтобы оказаться в момент t_1 в точке r^1 ➪ мы найдем $v^0 = v^0(r^1)$ ➪ $r^1 = r(t_1) = r(r^0, v^0, t_1)$ ➪ решим задачу (1), (2).
- Другой взгляд: задача (1), (3) среди всех траекторий, начинающихся в r^0 и заканчивающихся в r_1 выбирает одну истинную, отвечающую истинному движению ➪
- Можно попытаться поставить задачу на экстремум

- Нужен **функционал** -- отображение из пространства функций в пространство чисел:

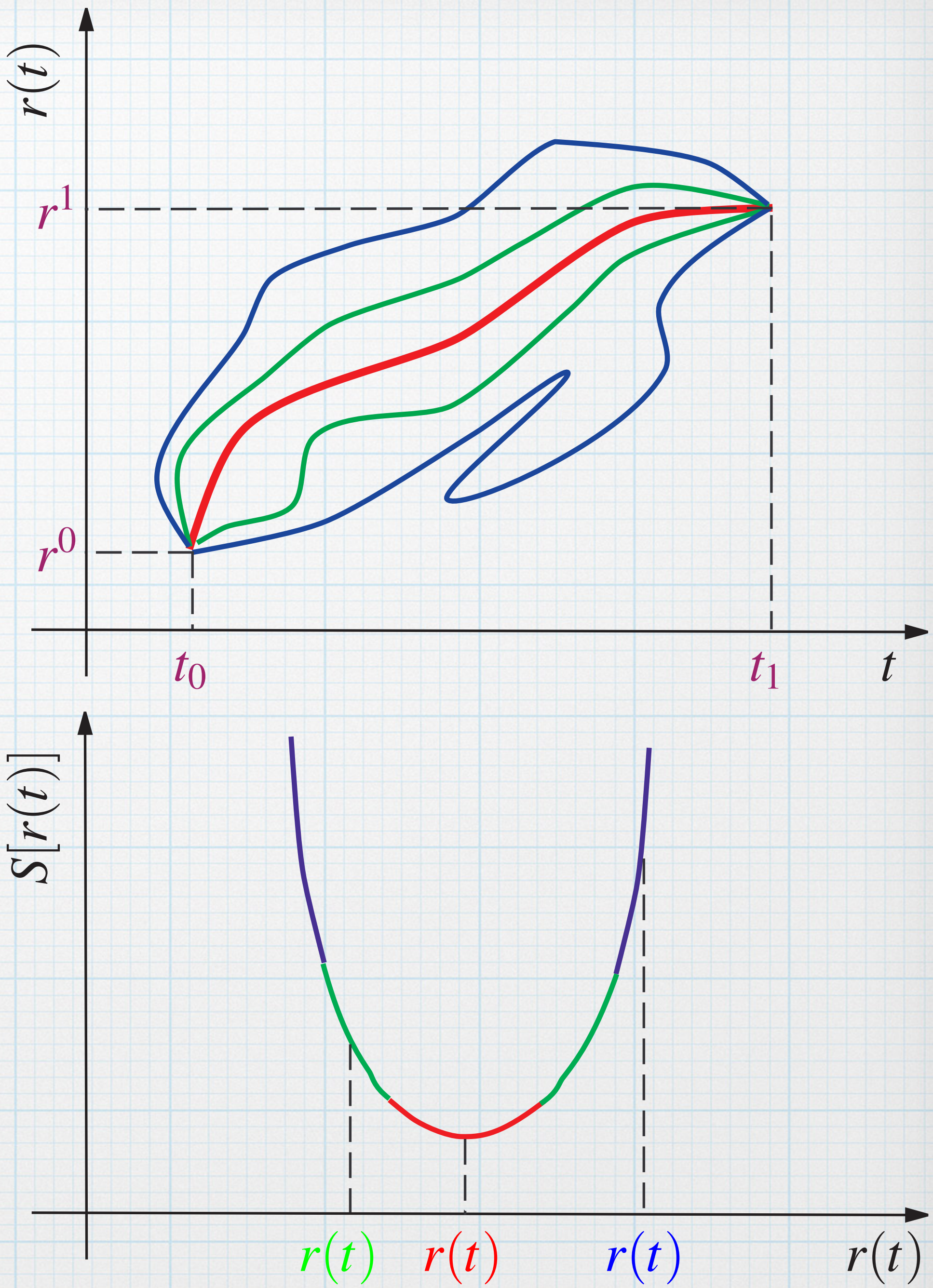
$S[r(t)]$: функции $r(t) \to$ числа $S[r]$

- Минимум или, в общем случае, стационарная точка $S[r]$ является истинной траекторией:

$$\frac{\delta S[r]}{\delta r(t)} = 0 \qquad (4)$$

$r(t)$ -- истинная траектория

- $S[r]$ называется **действием**
- (4) -- **вариационная производная** -- аналог обычной



Как построить действие?

- Из некоторых общих соображений (принцип соответствия, локальность и т.п.) можно предположить

$$S[r] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{r}, r, t) \qquad (5)$$

- $L(\dot{r}, r, t)$ -- функция Лагранжа или лагранжиан

- Уравнение экстремали

$$\frac{\delta S}{\delta r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$ -- уравнения Эйлера-Лагранжа (6)

- Чтобы получить (1) необходимо положить

$$L = T - V$$

$T(\dot{r}) = \frac{mv^2}{2}$ -- кинетическая энергия

$V(r)$ -- потенциальная энергия

Преимущества?

✏ Легко обобщить на случай многих степеней свободы

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{\vec{r}}_n, r_n, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_n} = 0$$

✏ Легко учитывать связи $f_k(\dot{\vec{r}}_n, \vec{r}_n, t) = 0$ ⇨ множители Лагранжа:

$$L \to L + \sum_k \lambda_k f_k$$

✏ Легко переходить к другим (обобщенным) координатам

✏ Легко учитывать симметрии: если система обладает некоторой симметрией, то действие (лагранжиан) должно быть инвариантно относительно соответствующих преобразований ⇨

✏ Теорема Нётер: каждой непрерывной симметрии соответствует сохраняющаяся величина. Например,

✓ $L(\dot{\vec{r}}_n, \vec{r}_n, \cancel{t})$ ➪ симметрия по отношению к сдвигам времени $t \to t + \varepsilon$

➪ сохраняется энергия $E = T + V$

✓ Трансляционная инвариантность $\vec{r}_n \to \vec{r}_n + \vec{\varepsilon}$ ➪ сохраняются импульсы

$$\vec{p}_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n}$$

✓ Изотропность пространства (вращательная симметрия) $\vec{r}_n \to \vec{r}_n + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_n$

➪ сохраняется момент импульса $\vec{p}_n \times \vec{r}_n$

✏ Легко обобщается на релятивистскую механику, теорию поля, используется в квантовой теории

Классическая теория поля

- Поля -- набор функций времени и координат $u_\alpha = u_\alpha(t, \vec{r})$
- Примеры
  - ✓ Электрическое поле $\vec{E}(t, \vec{r})$: $u_\alpha = E_{\alpha=1,2,3}$
  - ✓ Электромагнитное поле описывается 4-х мерным вектором-потенциалом $A_{\mu=0,1,2,3}(x) = (A_0, -\vec{A})$, $x^\mu = (x^0 = ct, \vec{x})$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \dot{\vec{A}}$
  - ✓ Отклонение струны от положения равновесия $u(t, x)$
  - ✓ Движение частицы $\vec{r}(t)$ -- можно рассматривать как теорию 3-х полей, зависящих только от времени, т.е. в $(1+0)$-мерном пространстве-времени
- Действие -- функционал полей ⇨ лагранжиан -- функция полей и их производных по времени и координатам ($\partial_y = \partial/\partial y,\ \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$)

$$S[u] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3x \mathscr{L}(\partial_t u_\alpha, \partial_{\vec{x}} u_\alpha, u_\alpha, t, \vec{x}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u_\alpha} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_\alpha} = 0$$

Классическая теория поля $\Longleftrightarrow$ Классическая механика системы с бесконечным числом степеней свободы

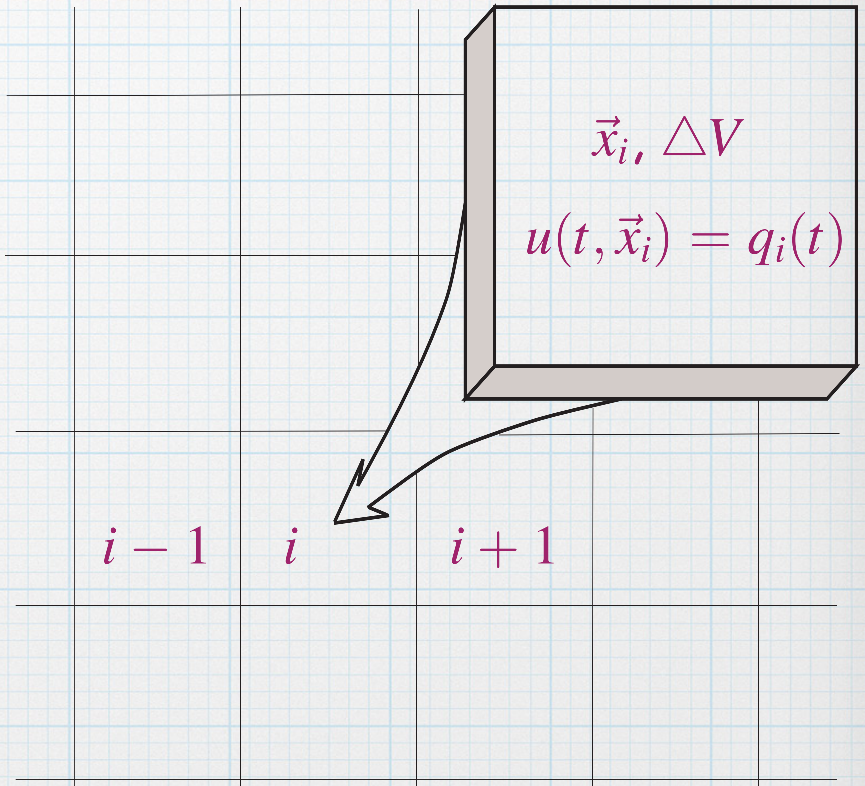
✓ $i = 1, \ldots, N = \dfrac{V}{\triangle V}$ -- непрерывный предел

$\triangle V \to 0$ ➪ $N \to \infty$

✓ $\partial_{\vec{x}} u(t, \vec{x}) \sim \dfrac{q_{i+1} - q_i}{\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i}$ -- не зависит от $\dot{q}_i(t)$!

✓ $$\int\limits_V d^3x \mathscr{L}(\dot{u}, \partial_{\vec{x}} u) \to \sum_{i=1}^{N} \triangle V \mathscr{L}\left(\dot{q}_i, \frac{q_{i+1} - q_i}{\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i}, q_i\right) \equiv$$

$$\equiv L(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, q_1, \ldots, q_N)$$



$$S[q] = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt L(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, q_1, \ldots, q_N)$$ ➪ поле -- обобщенная координата, аналог $\vec{r}$!

Квантовая механика

✏ Главное отличие от классической механики -- принцип неопределенности Гейзенберга

$$\triangle p \cdot \triangle x \geq \hbar$$

- У частицы до измерения нет ни импульса, ни координаты
- Нет траектории
- Предсказывать можно только вероятности -- квантовый индетерминизм
- Состояние системы описывается (нормированным) вектором в гильбертовом пространстве -- пространстве функций

$$\mathscr{R}(t)_{\text{class}} = \{\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_N(t)\} \to |\mathscr{R}(t)\rangle$$

- Гильбертово пространство линейно. Поэтому выполняется принцип суперпозиции: если $|\mathscr{A}\rangle$ и $|\mathscr{B}\rangle$ -- состояния, то

$$|\mathscr{R}\rangle = \alpha|\mathscr{A}\rangle + \beta|\mathscr{B}\rangle \quad \text{-- тоже состояние} \tag{7}$$

- Состояние можно спроецировать на какое-то заданное сопряженное состояние $\langle\mathscr{R}'|$. Например, если в (7) $|\mathscr{A}\rangle$ и $|\mathscr{B}\rangle$ ортогональны, $\langle\mathscr{A}|\mathscr{B}\rangle = 0$, то

$$\langle\mathscr{A}|\mathscr{R}\rangle = \alpha,$$

при этом $0 \le |\alpha|^2 \le 1$ и может быть проинтерпретирована как вероятность найти примесь состояния $|\mathscr{A}\rangle$ в состоянии $|\mathscr{R}\rangle$. Сама α называется амплитудой вероятности

- Например, если в качестве состояний $|\mathscr{A}\rangle$ выбрать состояния с определенной координатой x, $|x\rangle$, то

$$\Psi(t,x) = \langle x|\mathscr{R}(t)\rangle \quad \text{-- волновая функция в координатном представлении}$$

Вероятность обнаружить частицу в интервале dx суть

$$P(t,x)dx = |\Psi(t,x)|^2 dx$$

➪ Линейное пространство ➪ линейная эволюция

$$|\mathscr{R}(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\mathscr{R}(t_0)\rangle$$

➪ Амплитуда вероятности обнаружить в результате эволюции систему в каком-нибудь состоянии $|\mathscr{A}\rangle$ будет

$U(\mathscr{R},\mathscr{A},t_0,t) = \langle\mathscr{A}|\hat{U}(t,t_0)|\mathscr{R}(t_0)\rangle$ ➪ $P_{\mathscr{R}\to\mathscr{A}} = |U(\mathscr{R},\mathscr{A},t_0,t)|^2$ -- вероятность

Найдем амплитуду перехода квантовой частицы
из точки (r_0,t_0) в точку (r_1,t_1)

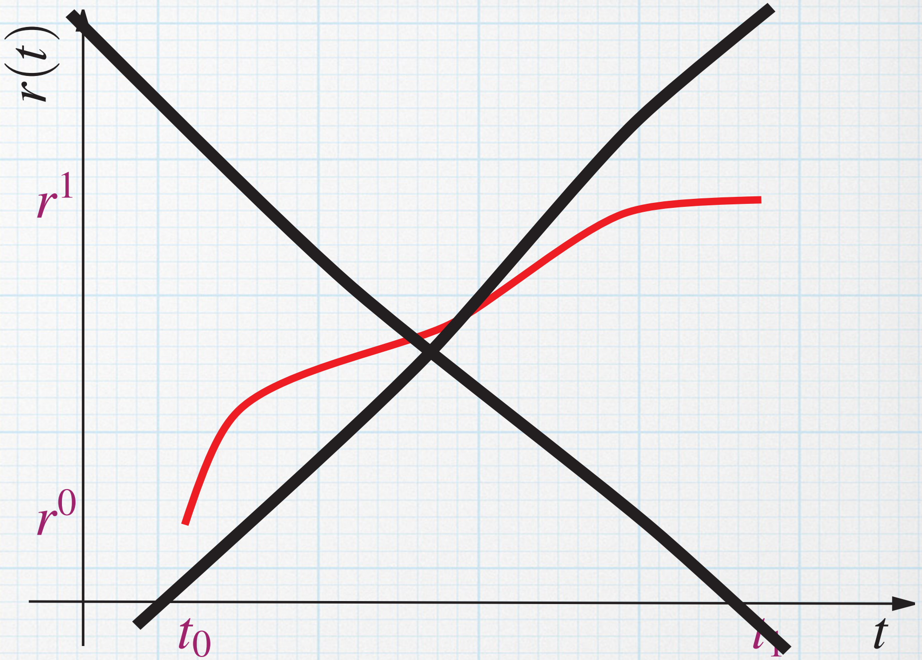
- Нет определенной траектории ➪
- Частица «движется» по всем путям ➪
- Все пути равноправны ➪

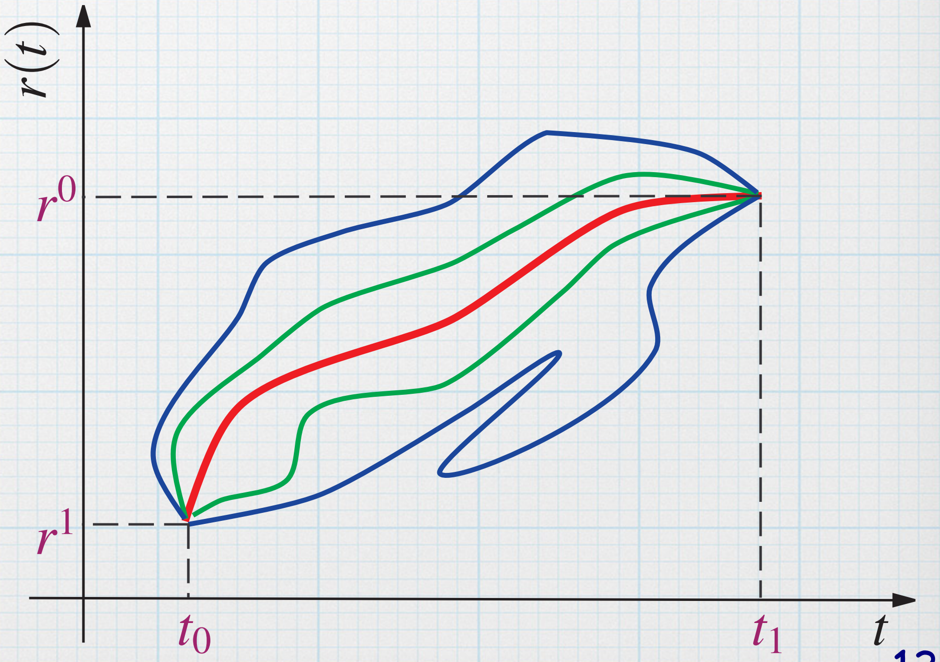
$$U(r_0,t_0,r_1,t_1)=\sum_{\text{по путям}} e^{i\alpha[\text{путь}]}=$$

$$=\int \mathscr{D}r\cdot e^{i\alpha[r]} \qquad (8)$$

-- функциональный/континуальный интеграл или интеграл по путям/траекториям

? Как определить $\mathscr{D}r$?





✏ Можно вычислять (8) методом стационарной фазы: если α сильно меняется для соседних траекторий, то из-за осцилляций вклады от таких путей сокращаются ➪ основной вклад дают пути вблизи стационарного,

$$\frac{\delta\alpha[r]}{\delta r} = 0 \tag{9}$$

-- напоминает уравнение движения, если $\alpha[r] \sim S[r]$

✏ Это действительно так: в пределе $\hbar \to 0$ мы должны получить одну классическую траекторию. Поскольку

$$[\hbar] = [S] = \text{Дж} \cdot \text{с},$$

то положим $\alpha = S/\hbar$. Тогда при $S \gg \hbar$ основной вклад в (8) будет даваться классической траекторией, определяемой из уравнения движения

$$\frac{\delta S[r]}{\delta r} = 0, \quad r(t_0) = r_0, \quad r(t_1) = r_1 \tag{10}$$

NB: Вывод несколько эвристический. Но при некоторых предположениях ($L = T(\dot{r}) - V(r)$) можно показать, что амплитуда удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial U(t,r)}{\partial t} = \hat{H}U(t,r), \quad U(t_0,r_0) = 1, \qquad (11)$$

где $\hat{H}$ оператор Гамильтона или гамильтониан -- энергия, выраженная в терминах импульсов и координат,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}),$$

$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\partial_{\vec{r}}$ -- оператор импульса, $\hat{\vec{r}} = \vec{r}$ -- оператор координаты

NB: (11)--дифф. ур. ➪ однозначное решение ➪ квантовый детерминизм

NB: Уравнение (11) -- это уравнение Шредингера. Обратно: можно построить решение уравнения Шредингера и показать, что оно имеет вид функционального интеграла (8) ➪

Обычная формулировка КМ $\Longleftrightarrow$ Интеграл по путям

Квантовая теория поля

✏ Обобщение: $r(t) \to u(t, \vec{x})$ ➪

$$\langle u(t_1, \vec{x}) | \hat{U}(t_1, t_0) | u(t_0, \vec{x}) \rangle = \int \mathscr{D}u \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^{d-1}x \mathscr{L}(\partial_\mu u, u) \right)$$

✏ Любая физическая величина выражается через корреляторы -- интегралы вида

$$\int \mathscr{D}u \cdot u(x_1) \dots u(x_n) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0 \to -\infty}^{t_1 \to \infty} dt \int_{V \to \infty} d^{d-1}x \mathscr{L}(\partial_\mu u, u) \right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta j(x_k)} \right) \int \mathscr{D}u \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^d x (\mathscr{L} + ju) \right) \Big|_{j=0} \equiv \prod_{k=1}^{n} \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta j(x_k)} \right) Z(j) \Big|_{j=0}$$

$Z(j)$ -- производящий функционал

Ответ в КТП написан, но надо вычислить $Z(j)$!!!

Естественная (натуральная) система единиц

- Две константы $\hbar$ и c

$$[c] = \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{[\text{L}]}{[\text{T}]}, \quad [\hbar] = \text{Дж}\cdot\text{с} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{[\text{M}]\cdot[\text{L}]^2}{[\text{T}]}$$

- Положим $\hbar = c = 1$ ⇨

$$[L] = [T], \quad [M] = [E] = \frac{1}{[L]} = \frac{1}{[T]}$$ ⇨

- Других размерных величин нет! Например, заряд электрона безразмерен

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} \simeq \frac{1}{3}, \quad \alpha = \frac{1}{137}$$ -- постоянная тонкой структуры

- Все можно измерять в единицах длины или (обычно) энергии (электронвольтах)

NB: Отражает наше умение измерять только длины и число колебаний. Всё остальное -- производные.

Как вычислить $Z[j]$?

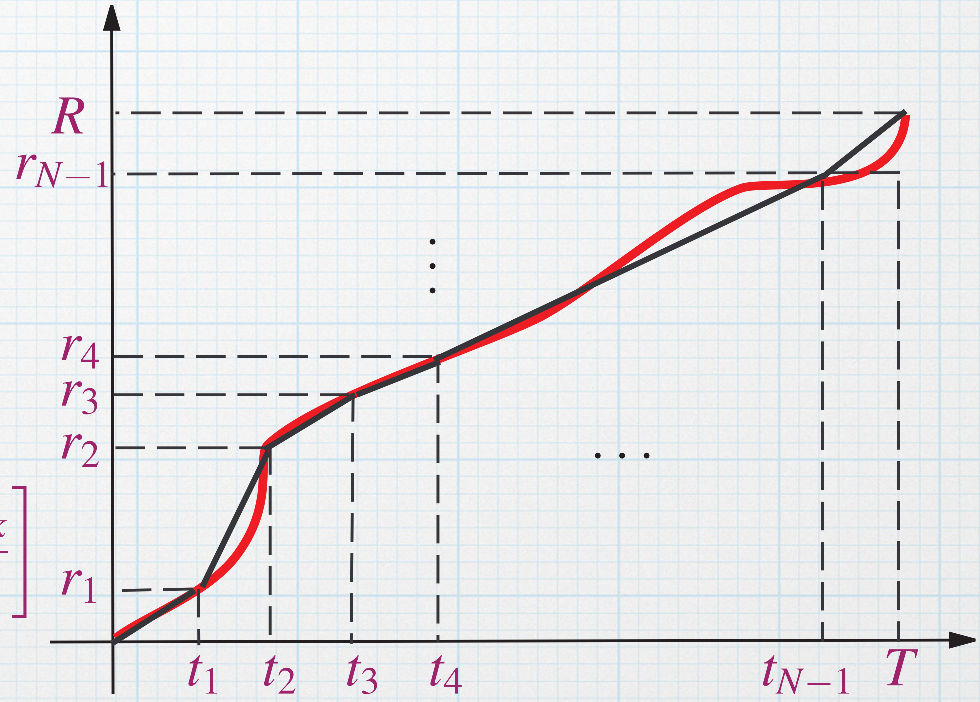
Квантовая механика $\Longleftrightarrow$ (1+0)-мерная КТП. Гармонический осциллятор

- Рассмотрим квантовомеханический гармонический осциллятор

$$S[r,j]=\int_0^T dt\left(\frac{\dot r^2}{2}-\frac{\omega^2 r^2}{2}+jr\right)\to$$

$$\sum_k\left[\frac{(r_{k+1}-r_k)^2}{2\varepsilon}-\frac{\varepsilon\omega^2}{8}(r_{k+1}+r_k)^2+\varepsilon j_k\frac{r_{k+1}+r_k}{2}\right]$$

-- квадратичная форма! ⇨



$$Z[j]=\int\mathscr{D}r\,e^{iS[r,j]}=\int\prod_k dr_k e^{(\text{квадр. форм.})}$$ -- гауссовы интегралы!

Гауссов интеграл

✏ Рассмотрим N-мерный гауссов интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N} d\xi_k \exp\left(-\xi_j L_{ji} \xi_i - j_i \xi_i\right), \quad L = L^{\mathrm{T}}, \exists\, L^{-1}$$

1) $\chi = \xi + \dfrac{L^{-1} j}{2}$ ⇨

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{N} d\chi_k \exp\left(-\chi^{\mathrm{T}} L \chi + \frac{1}{4} j^{\mathrm{T}} L^{-1} j\right)$$

2) Диаганализуем L: $\chi = Ox$, $O^{-1} = O^{\mathrm{T}}$, $O^{\mathrm{T}} L O = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ ⇨

$$I = \mathrm{e}^{\frac{1}{4} j^{\mathrm{T}} L^{-1} j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{N} dx_k \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k^2\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4} j^{\mathrm{T}} L^{-1} j} \prod_{k=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_k \exp\left(-\lambda_k x_k^2\right) =$$

$$= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{N} \lambda_k}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4} j^{\mathrm{T}} L^{-1} j} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det L}} \mathrm{e}^{\frac{1}{4} j^{\mathrm{T}} L^{-1} j}$$ ⇨

✏ Для квадратичного действия $Z[j]$ может быть вычислен!

✏ Квадратичное действие ➪ линейные уравнения движения,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu u} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0$$

➪ теория невзаимодействующих полей ➪ не интересно ➪

✏ Нужны слагаемые со степенями полей > 2. Перед каждым таким слагаемым можно и нужно поставить параметр -- константу связи -- аналог заряда электрона.

✏ Простейший пример: φ^4-теория скалярного поля,

$$S[\varphi] = \int d^d x \left(\frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{2} - \frac{m^2 \varphi^2}{2} - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \right) \quad ➪ \quad \partial^\mu \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = 0$$

-- нелинейное уравнение ➪ нет методов найти общее решение

NB: $[\varphi] = \dfrac{d-2}{2}$ ➪ $[m] = 1$ -- масса частицы, $[\lambda] = 4 - d$ ➪

! при бо́льших d или степенях поля $[\lambda] < 0$ **!**

Как вычислить $Z[j]$?

Режим слабой связи. Теория возмущений

- Идея: при малых λ можно попробывать разложить в ряд Тейлора подынтегральное выражение и проинтегрировать каждый член ряда -- теория возмущений

- Рассмотрим нульмерную ($d = 0(!)$) КТП. Нет ни времени, ни пространства ➪ поле -- просто числа ➪ функциональный интеграл превращается в обычный,

$$Z \to I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp\left(-\varphi^2 - \frac{\lambda}{8}\varphi^4\right)$$

NB: При $\lambda > 0$ интеграл сходится, при $\lambda < 0$ -- расходится ➪ $\lambda = 0$ -- особая точка, а мы пытаемся разложить $I(\lambda)$ вблизи этой точки. Очень опасно! Тем не менее, посмотрим, что получится.

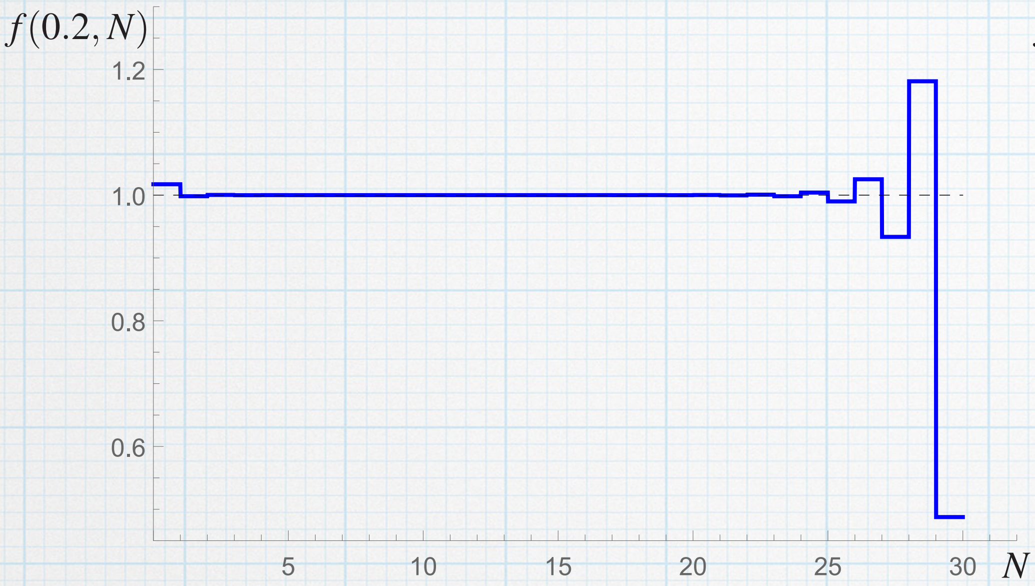
$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{8^n n!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varphi \cdot \varphi^{4n} \mathrm{e}^{-\varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{8^n n!} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)$$

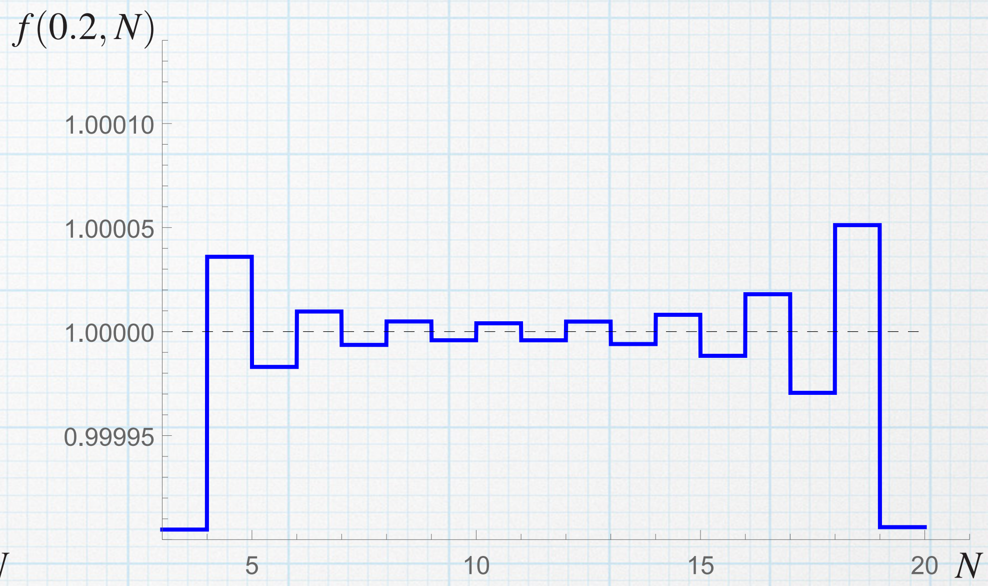
$\Gamma(z)$ -- Γ-функция Эйлера, обобщение факториала на комплексную плоскость: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. При больших $z \to \infty$ формула Стирлинга,

$$\Gamma(z \to \infty) \sim z^z \mathrm{e}^{-z}$$

✏ Поэтому при $n \to \infty$ n-ый член ряда ведет себя как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\lambda)^n}{8^n n!} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{-\lambda n}{2\mathrm{e}}\right)^n \sim \begin{cases} < 1 \text{при } n < \dfrac{2\mathrm{e}}{\lambda} \\ > 1 \text{при } n > \dfrac{2\mathrm{e}}{\lambda} \end{cases}$$





- При $n > 2\mathrm{e}/\lambda$ ряд взрывается -- асимптотический ряд
- При $\lambda > 0$ интеграл может быть вычислен

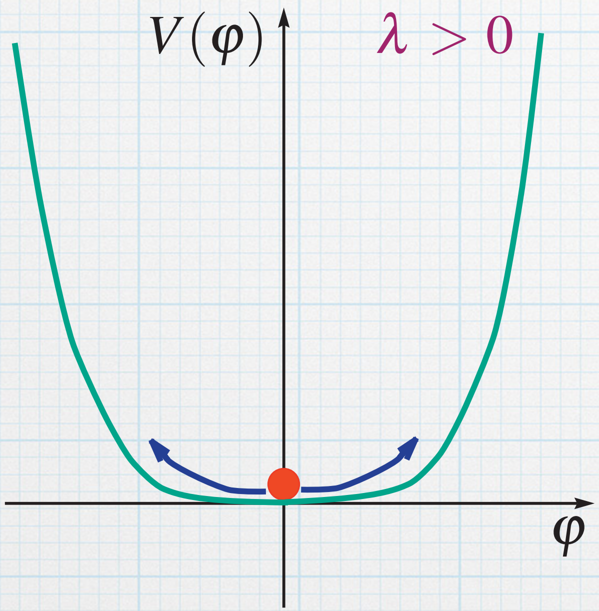
$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) K_{1/4}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad K_{1/4}\text{-- функция Макдональда}$$

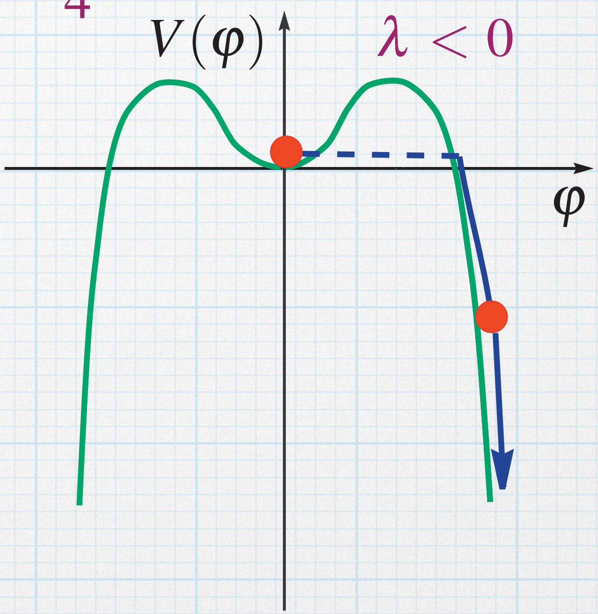
- $I(\lambda)$ имеет разрез при $\lambda < 0$
- На рисунках отношение частичной суммы ряда к $I(\lambda)$

$$f(\lambda, N) = \frac{1}{I(\lambda)} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-\lambda)^n}{8^n n!} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right),$$

✏ В КТП аналогичная ситуация. Например, в φ^4-теории при $\lambda > 0$ имеется стабильное основное состояние -- вакуум, а при $\lambda < 0$ вакуум не стабилен ➪ система распадется, черпая энергию из вакуума.

$$V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2} + \frac{\lambda\varphi^4}{4}$$





✏ В КЭД то же самое: $\alpha = e^2/4\pi \to -\alpha$ ➪ разноименные заряды отталкиваются ➪ вакуум распадется на электрон-позитронные пары ➪

Ряды ТВ в КТП асимптотические!

Что делать?

- Вычислять точный ответ -- не умеем
- Вычислять конечное число членов ряда, пока он не взорвался, -- дальше вычислять бессмысленно. Но конечное число членов должно при малых λ давать хорошую апроксимацию
- В КЭД аномальный магнитный момент электрона вычислен вплоть до 5-го порядка по α, т.е. 10(!) знаков после запятой ($\alpha^5 = 1/137^5 \sim 10^{-10}$). Дальше считать бессмысленно: вероятно, ряд взрывается на 6-7 члене.
- Эта величина измерена с той же точностью. И она совпадает с теоретической !!!

Триумф КТП !!!

Проблема расходимостей

✏ Рассмотрим интеграл (нижний предел не важен)

$$I(a) = \int^{\infty} dx \cdot x^a = \lim_{\Lambda\to\infty} \int^{\Lambda} dx \cdot x^a = \frac{\Lambda^{a+1}}{a+1} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \Lambda^{a+1} \to \infty & \text{при } a > -1 \text{ -- расходится} \\ \ln\Lambda \to \infty & \text{при } a = -1 \text{ -- расходится, но слабо} \\ \Lambda^{-|a|+1} \to \text{const} & \text{при } a < -1 \text{ -- сходится} \end{cases}$$

NB: Если $[x] = 1$, то $[\Lambda] = 1$ и $[I(a)] = a + 1$ ➪

✓ $[I] > 0$ -- интеграл расходится степенным образом

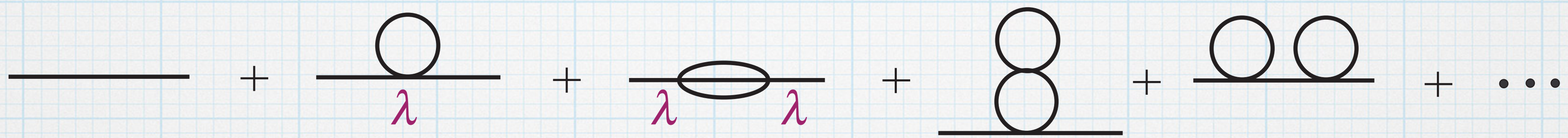
✓ $[I] = 0$ -- интеграл расходится логарифмически

✓ $[I] < 0$ -- интеграл сходится

✏ В КТП каждый член ряда ТВ можно представить в виде диаграмм Фейнмана

✏ О них можно думать как о путях, по которым мы суммировали в интеграле по траекториям. Каждому такому пути (диаграмме) сопоставляется некоторое математическое выражение по правилам Фейнмана

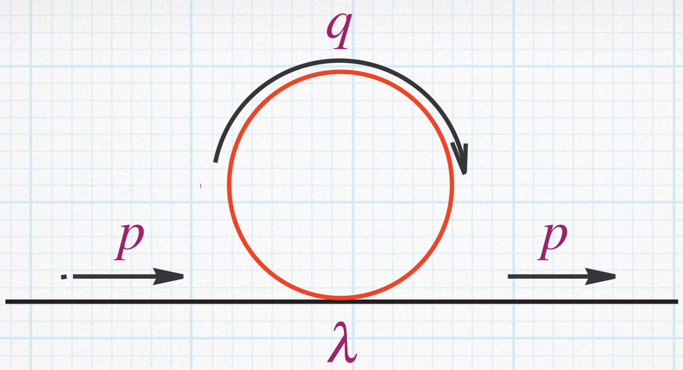
✏ Рассмотрим распространение частицы в теории φ^4



✓ Каждый узел -- вершина -- элементарный акт взаимодействия ➪ $\sim \lambda$

✓ После акта взаимодействия частица меняет свои свойства (состояние). Например, меняется импульс (но ЗСИ работает) ➪ меняется история ➪

✓ По всем таким историям ($\equiv$ траекториям) мы должны просуммировать



- ЗСИ работает во всех вершинах -- подобно правилам Кирхгофа, но он не фиксирует импульс, бегающий по замкнутому циклу -- петле, также как правила Кирхгофа не фиксируют ток, бегающий по сверхпроводящему замкнутому контуру ⇨
- Число состояний в петле бесконечно ⇨ можно ожидать, что и сумма по ним будет бесконечна (так оно и оказывается) -- ультрафиолетовая расходимость
- $$J_1 = \lambda \sum_{\text{состояния в петле}} = \lambda \int d^d q f_1(q) = \lambda I_1$$
- Аналогично  $= J_2 = \lambda^2 \int d^d q f_2(q) = \lambda^2 I_2$

✏ Пусть $[\lambda] = l$

✏ Поскольку J_1 и J_2 -- вклады в одну величину, то

$$[J_1 = \lambda I_1] = [J_2 = \lambda^2 I_2] \quad \Rightarrow$$

✏ $[I_2] = [I_1] - l$, $[I_n] = [I_1] - ln$

✏ Пусть $[I_1]$ расходится $\Rightarrow$ $[I_1] \geq 0$ $\Rightarrow$

✓ $l > 0$ -- рано или поздно $[I_n] < 0$ и I_n сходится. Мы имеем конечное число расходимостей.

✓ $l = 0$ -- все интегралы I_n расходятся, но так же, как и I_1 -- один тип расходимости

✓ $l < 0$ -- даже если I_1 сходится, рано или поздно I_n начнут расходится, и чем больше n, тем сильнее -- бесконечное число разных типов расходимостей

Что делать?

- В первых двух случаях -- конечное число расходимостей ($[\lambda] > 0$) или конечное число типов расходимостей ($[\lambda] = 0$) -- можно попытаться «запихнуть» их в ненаблюдаемые параметры теории, сделав наблюдаемые конечными и обеспечив конечные предсказания теории
- Такая процедура называется перенормировкой. И если это удается сделать, то теория перенормируемая. В противном случае $[\lambda] < 0$ теория неперенормируемая ⇨ проблемы с предсказательной силой
- Стандартная модель (СМ), описывающая электромагнитные, слабые и сильные ядерные взаимодействия не содержит констант с отрицательной размерностью и является перенормируемой
- СМ прекрасно описывает все имеющиеся данные по физике частиц ⇨
- СМ могла бы претендовать на роль теории всего сущего, если бы не гравитация ...

Другой взгляд на проблему $[\lambda] < 0$

- Хотим вычислить некую физическую велину f (безразмерную для простоты)

$$f = f(\lambda, E, m), \quad [f] = 0, \quad [\lambda] = l$$

- Из физических соображений ➪ в ультрарелятивистском пределе $E \gg m$ массой(ми) можно пренебречь ➪

- Считая, что существует предел $\lambda \to 0, m \to 0$, разложим f в ряд Тейлора по λ. Поскольку параметр разложения должен быть безразмерным, то разложение идет по λ/E^l ($m \to 0$ (!))

$$f(\lambda, E, m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{E^l}\right)^n C_n(E/m)$$

NB: $C_n \uparrow$ при $n \uparrow$ -- асимптотический ряд, но этой проблемы мы уже коснулись

✏ Если $l < 0$, то n-ый член разложения

$$\lambda^n E^{n|l|}$$ -- растет с ростом E ➪

- ✓ ТВ неприменима при больших E
- ✓ Физика низких энергий становится «чувствительной» к тому, что происходит при больших E $\Longleftrightarrow$ малых расстояниях
- ✓ При $l \geq 0$ таких проблем не возникает
- ✓ Аргумент справедлив в предположении, что мы рассматриваем теорию всего сущего. Если же теория справедлива только при $E < \Lambda$ -- эффективная теория, то можно рассматривать $l < 0$ ➪
- ✓ Численное значение λ говорит нам, до каких энергий теория справедлива $\Lambda \sim 1/\lambda^{1/|l|}$ ➪
- ✓ При больших энергиях $E > \Lambda$ мы должны видоизменить теорию, добавив, например, новые степени свободы с массами $\sim \Lambda$ -- «новую физику» ➪

Эффективная теория содержит в себе информацию о новой физике!

- Теория Ферми слабых ядерных взаимодействий, ответственных за β-распад, содержит константу Ферми

$$G_F \simeq 10^{-5} \cdot \frac{1}{\text{ГэВ}^2} \Rightarrow M_{\text{нов. физ.}} \sim \Lambda \sim \frac{1}{\sqrt{G_F}} \simeq 100 \text{ ГэВ} \simeq 100 \cdot M_{\text{протона}} \Rightarrow$$

- Была создана теория объединенных электрослабых взаимодействий, предсказывающая $\exists\, W^{\pm}$-, Z-бозонов и частицы Хиггса с массами ~ 100 ГэВ

- Эти частицы были открыты,

$$M_W \simeq 80 \text{ ГэВ}, \quad M_Z \simeq 90 \text{ ГэВ}, \quad M_H \simeq 126 \text{ ГэВ}$$

Триумф КТП !!!

- Стандартная модель неполна:
  - ✓ Нет массы нейтрино
  - ✓ Нет темной материи
  - ✓ Есть проблема иерархии
  - ✓ Есть CP-проблема сильных взаимодействий
- В СМ нет констант с отрицательной размерностью ⇨ мы не знаем, где искать новую физику
- И есть еще гравитация...

Проблема квантовой гравитации

- В специальной теории относительности (СТО) Эйнштейна пространство-время плоское. Теорема Пифагора

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx_0^2 - d\vec{x}^2$$

- В общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна гравитация объясняется искривлением пространства-времени. Теорема Пифагора

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$g_{\mu\nu}(x)$ -- метрика пространства-времени и описывает гравитационное поле

- Гравитация универсальна -- она взаимодействует с любыми формами энергии и давления ➪ взаимодействует со всеми полями СМ ➪ СМ (или ее расширения) без гравитации не может претендовать на роль теории всего сущего

- Гравитация порождается квантовыми частицами СМ, подчиняющимися принципу неопределенности: трудно себе представить, что частица без определенного импульса и координаты порождает классическое определенное поле с определенной скоростью ➪ гравитация должна быть квантовой

- Принцип соответствия: -- при малых скоростях и в слабых полях мы должны получить Закон всемирного тяготения Ньютона,

$$F = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G_N -- гравитационная постоянная Ньютона -- константа связи

- Размерности

$$[F] = [ma] = \frac{[M][L]}{[T^2]} = [M]^2 \quad \Rightarrow \quad [G_N] = \frac{[F][L^2]}{[M^2]} = [L^2] = \frac{1}{[M]^2}$$

Гравитация -- КТП с $[G_N] = -2$ ➪ проблемы

Когда гравитация перестает работать? Числа

- Введем массу и длину Планка

$$M_{PL} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} \simeq 10^{19} \cdot \text{ГэВ} \simeq 10^{-5} \cdot \text{г} \simeq 10^{19} \cdot M_{\text{пр.}}, \quad L_{PL} = \frac{1}{M_{PL}} \simeq 10^{-33} \cdot \text{см}$$

Физически: если сжать пылинку с M_{PL} до размера L_{PL}, то мы получим черную дыру

- Гравитация -- ОЧЕНЬ слаба,

$$\frac{F_{\text{грав}}(\text{прот.-эл.})}{F_{\text{кулон.}}(\text{прот.-эл.})} = \frac{M_{\text{прот.}} M_{\text{эл.}}}{M_{PL}^2} \cdot \frac{1}{e^2} \sim 10^{-40}$$

- M_{PL} -- ОГРОМНАЯ энергия. Такие энергии могли встречаться на ранних этапах эволюции Вселенной или в сингулярностях черных дыр. На БАК мы достигли «всего» $10^4 \cdot$ ГэВ
- Вплоть до M_{PL} мы можем использовать квантовую СМ (или ее расширения) и классическую ОТО (или ее модификации)

Основным препятствием на пути построения квантовой гравитации является $[G_N] = -2$ -- неперенормируемость ОТО --
и отсутствие экспериментальных данных, помогающих понять, как устранить проблему расходимостей

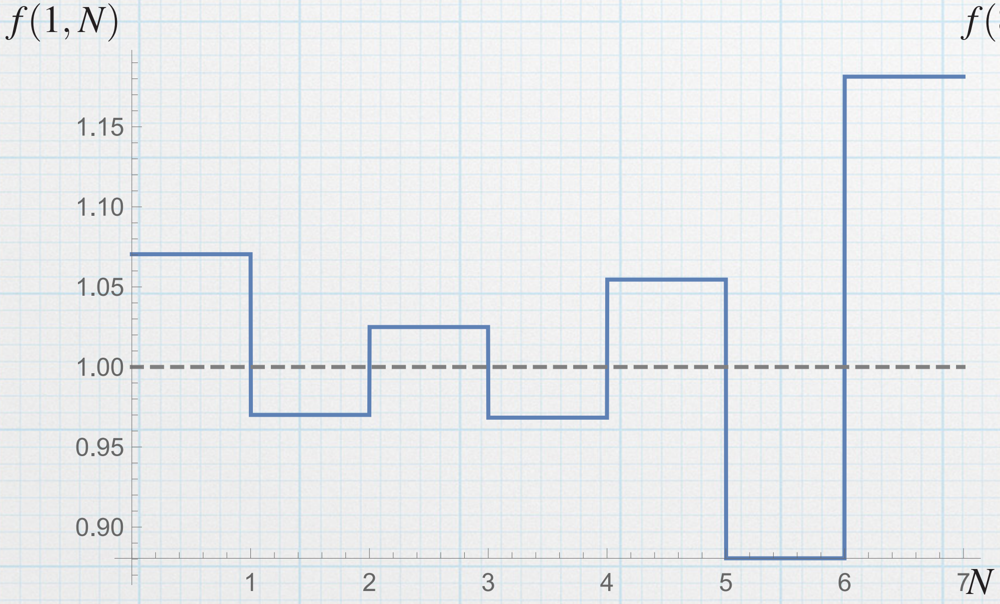
Что делать? Пути решения

- Строить разумные модели
  - ✓ Теория суперструн ($d = 10$) или M-теория ($d = 11$)
    Куда делись лишние измерения? Компактифицированы до L_{PL}
  - ✓ Петлевая гравитация
  - ✓ ...
- Пытаться найти обнаружимые следствия квантовой гравитации
  - ✓ Модели с большими (~ 1мм) дополнительными измерениями, мотивированные теорией струн. Позволяют снизить M_{PL} до $10^4 - 10^5$ГэВ -- энергии БАК и будущих коллайдеров
  - ✓ Искать на небе... По крайней мере, следы КТП мы там видим: мы с вами произошли из квантовых флуктуаций
  - ✓ Искать в космических лучах (10^{11}ГэВ). Возможно, нарушается Лоренц-инвариантность
  - ✓ ...

Как вычислить $Z[j]$?

Режим сильной связи. Проблемы

- Большие λ -- большая энергия взаимодействия
- В нашей модельной 0-мерной теории даже при $\lambda = 1$ ряд плохо апроксимирует истинный результат ➪ нельзя доверять ТВ



$$f(\lambda, N) = \left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \cdot \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) K_{1/4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{-1} \times \sum_{n=0}^{N} \frac{(-\lambda)^n}{8^n n!} \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right)$$

Существуют ли физические теории с $\lambda > 1$?

- Сильные ядерные взаимодействия при $E \sim 300$МэВ $\Longleftrightarrow R = 1/E \simeq 3 \cdot 10^{-14}$см:

$$\alpha_{QCD} = \frac{g^2}{4\pi} \simeq 15 \text{-- аналог постоянной тонкой структуры } \alpha_{QED} = \frac{e^2}{4\pi}$$

- В КЭД при $E \gg M_{PL}$ $\alpha_{QED} > 1$
- В статистической физике аналог $Z[j]$ -- статсумма

$$Z \sim \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right) \Rightarrow$$

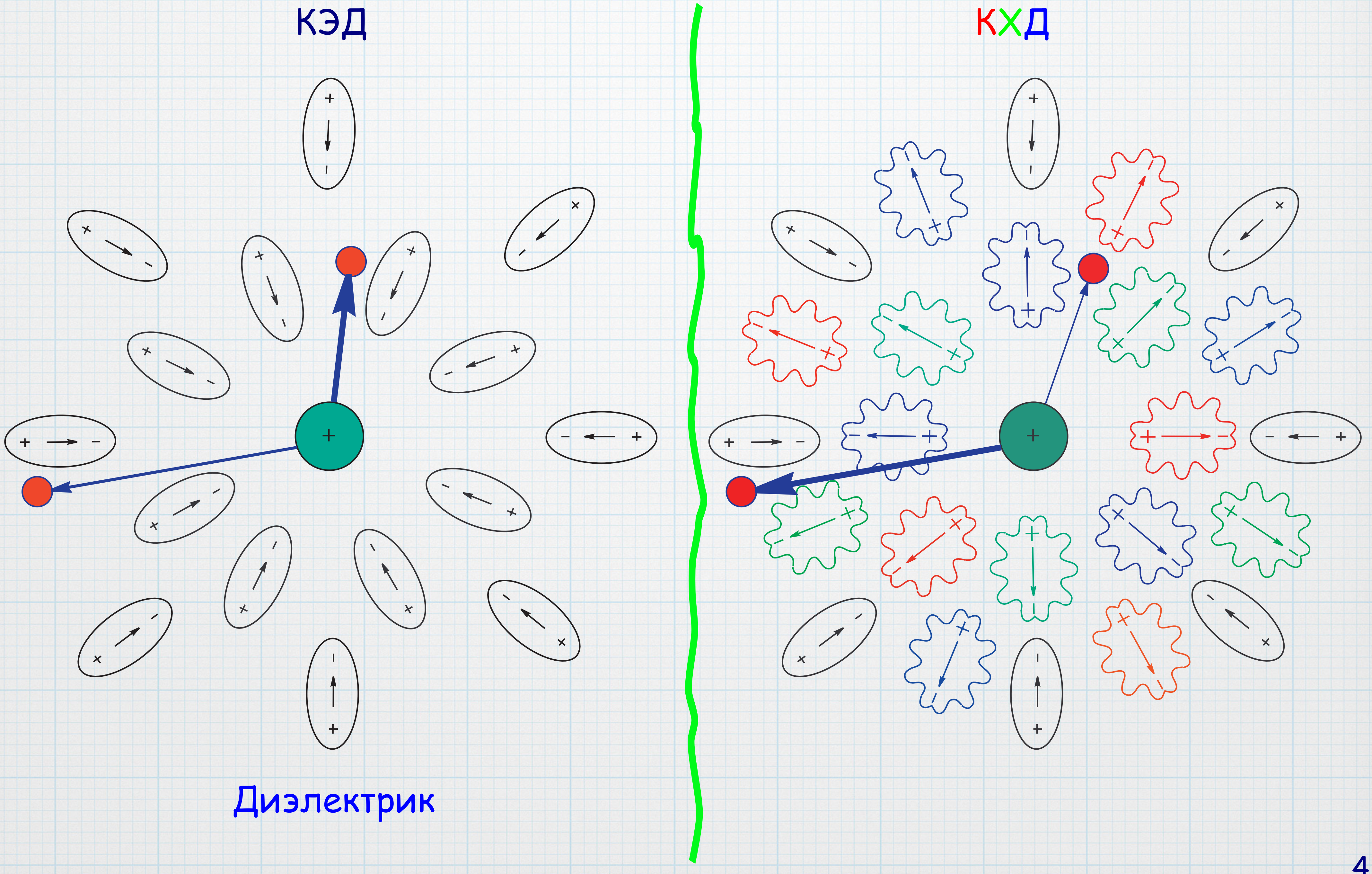
температура T -- аналог λ ⇒

сильная связь $\Longleftrightarrow$ высокие температуры

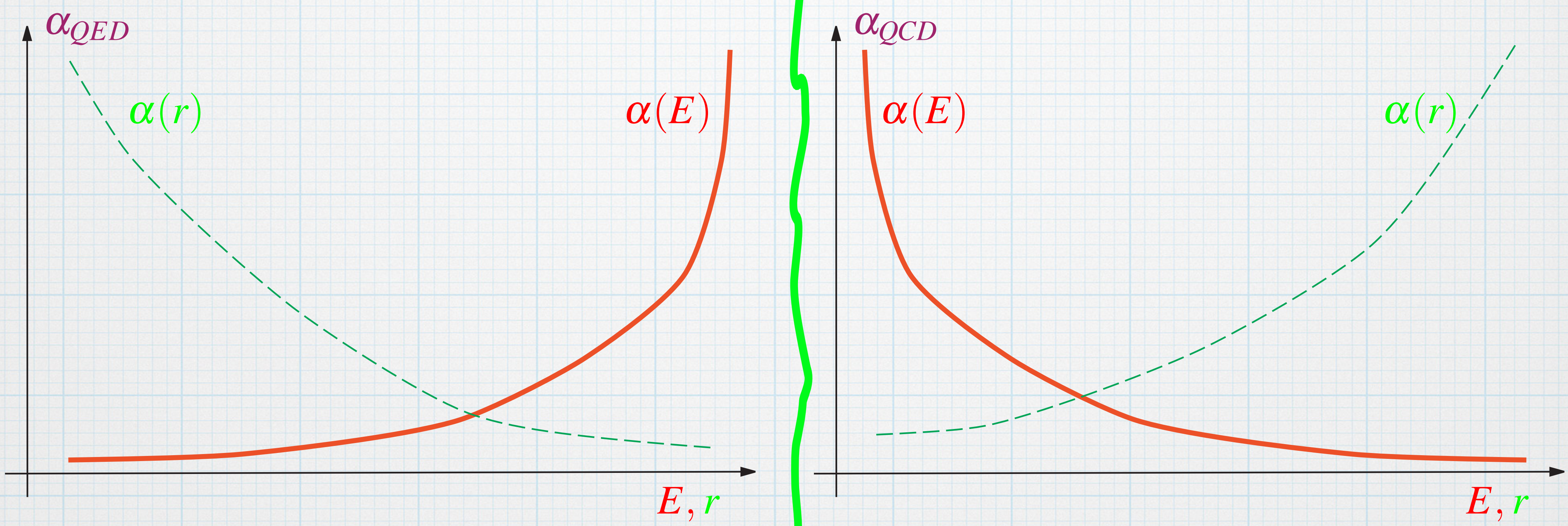
Почему говорим о $\lambda(E = 1/r)$?

КЭД (электромагнитные взаимодействия) ◁▷ КХД (сильные взаимодействия)

КЭД -- кв. электродинамика	✓КХД -- кв. хромодинамика
✓Один тип заряда -- электрический	✓Три типа заряда -- красный, зеленый, синий
✓Источник -- заряженная частица, напр., электрон $-e$	✓Источник -- кварки
✓Переносчик -- безмассовый фотон	✓Переносчик -- безмассовые глюоны -- 8 типов
✓Фотон -- не обладает зарядом ➪ не взаимодействует сам с собой ➪ принцип суперпозиции ЭМП	✓Глюон -- обладает цветным зарядом: комбинация цвет- $\overline{\text{антицвет}}$ ➪ 8 штук ➪ взаимодействуют между собой ➪ нет принципа суперпозиции


КЭД
КХД
Диэлектрик

КЭД КХД



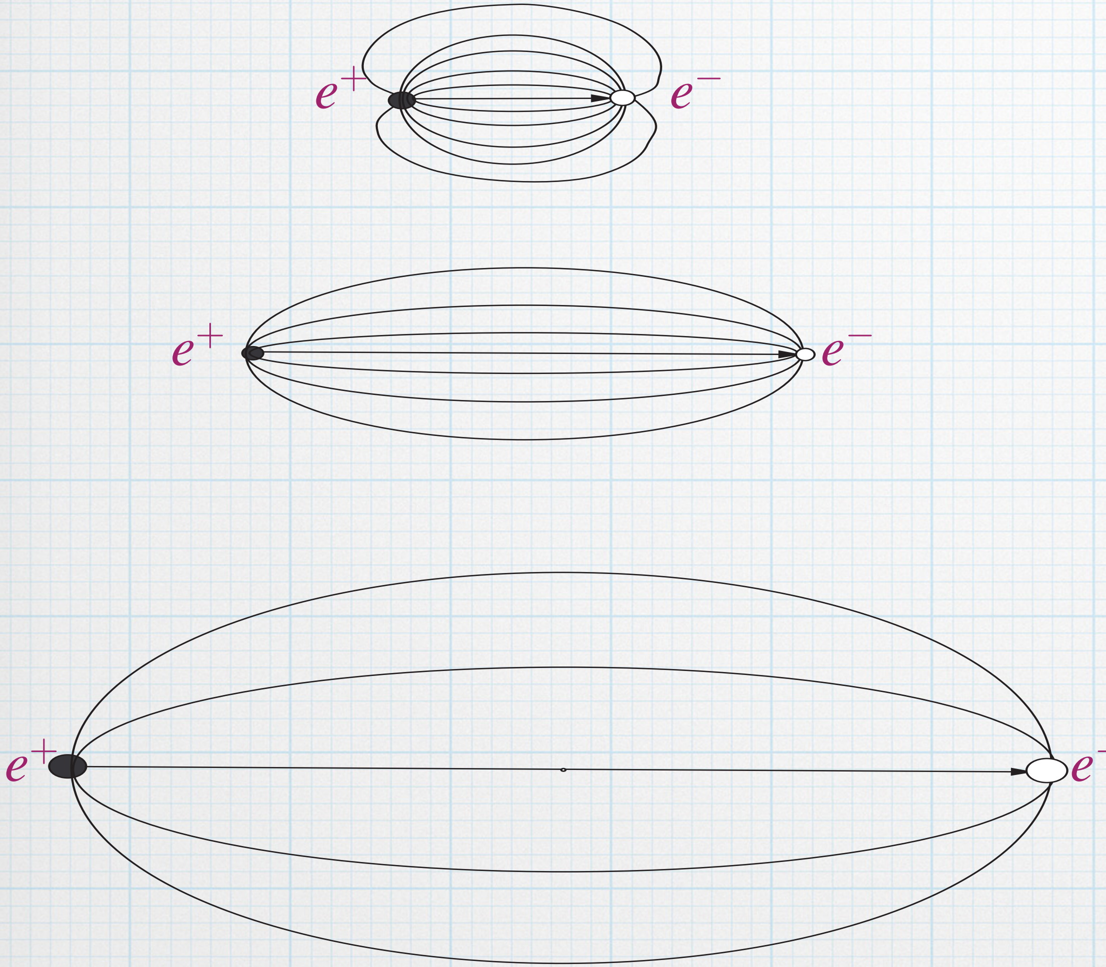
Можно использовать ТВ при низких

$E < M_{PL}$

Можно использовать ТВ при высоких

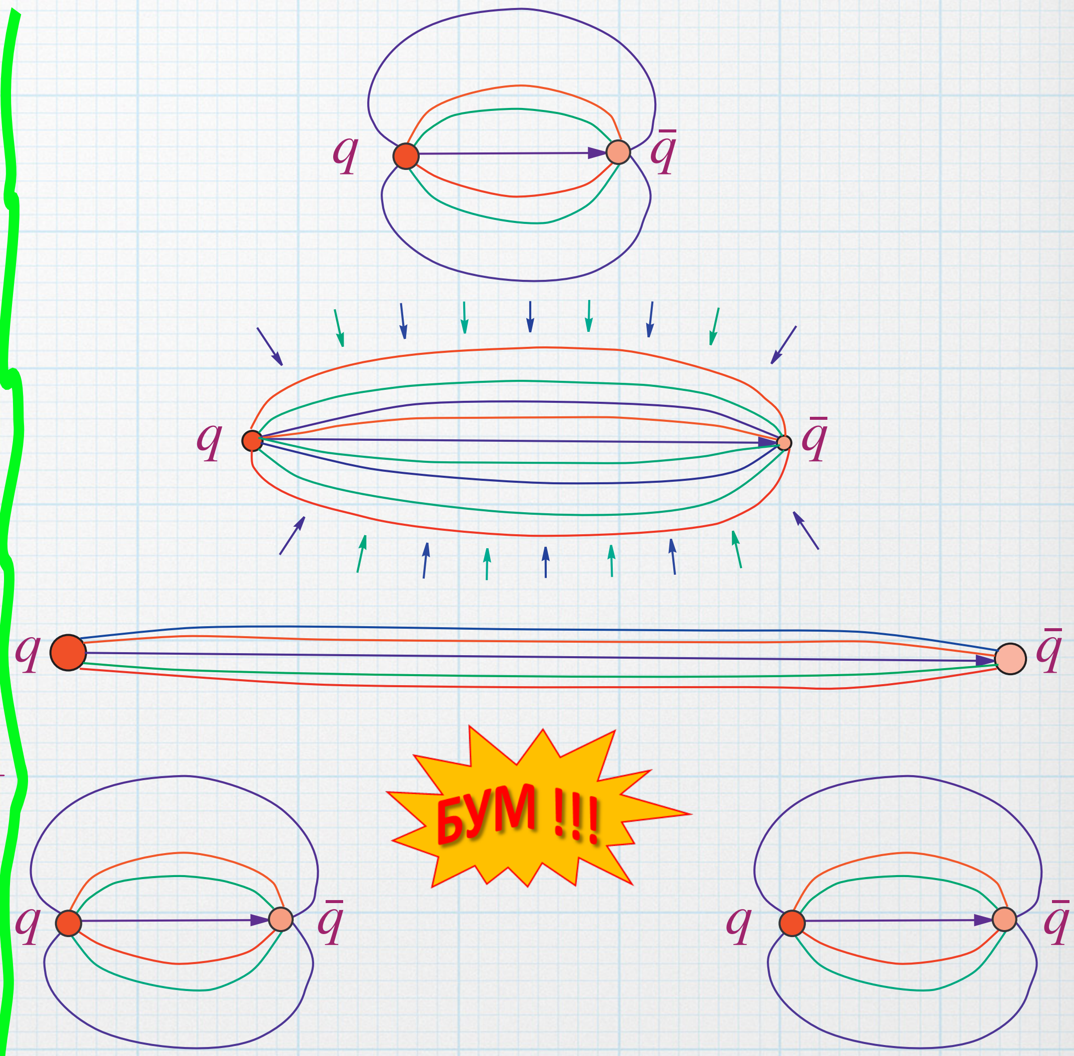
$E > 1$ГэВ

КЭД



$$E \sim \frac{1}{r}$$

КХД



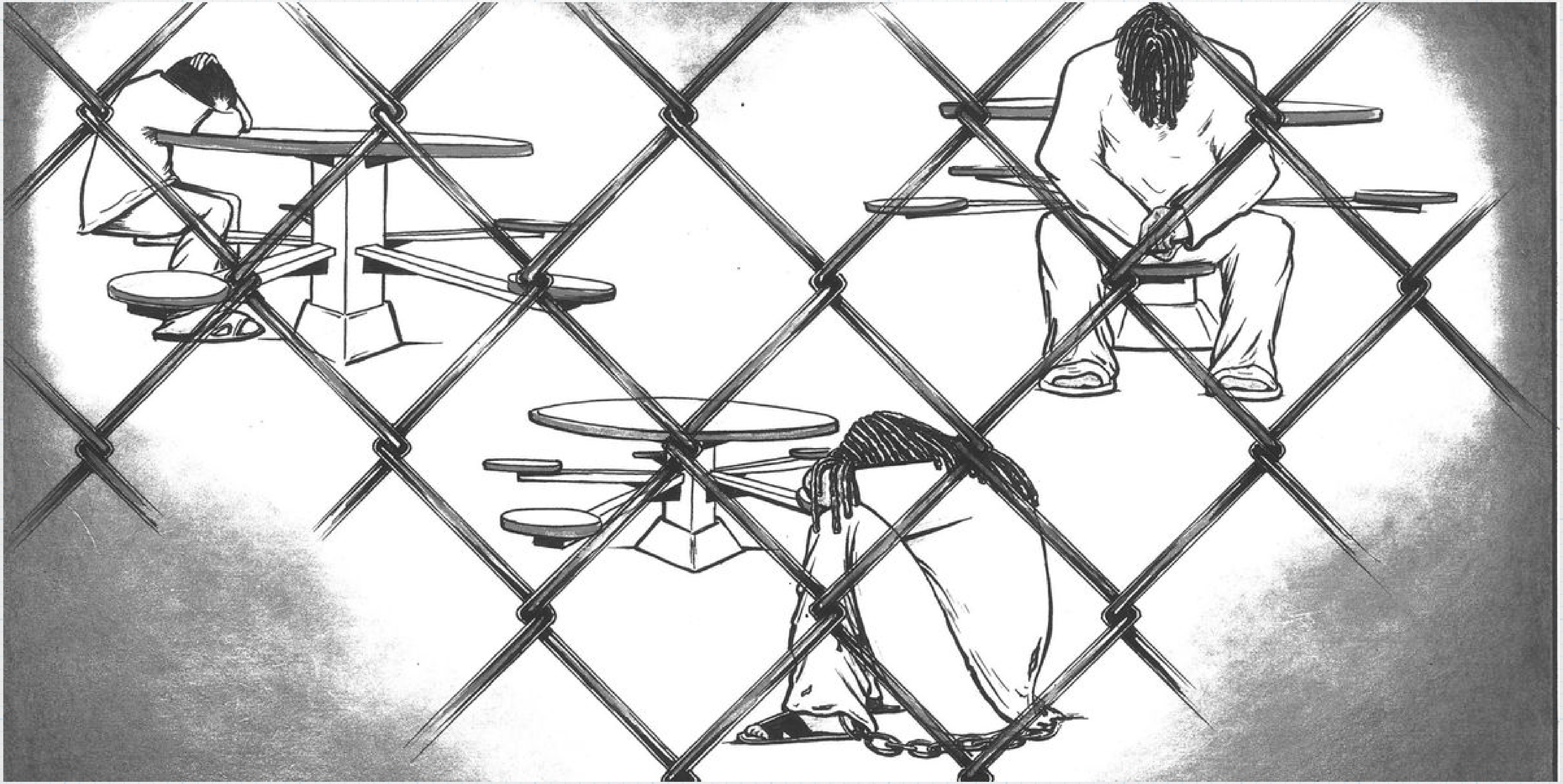
$E \sim r$ -- конфайнмент

Вакуум -- дуальный сверхпроводник

-- эффект Мейснера

Конфайнмент

Confinment (англ.) -- тюремное заключение, лишение свободы



- В природе встречаются только бесцветные (белые) состояния.
  - ✓ красный, зеленый, синий -- белый ➪ qqq ➪ протон, нейтрон, . . .
  - ✓ цвет-$\overline{\text{антицвет}}$ -- бесцветный ➪ $q\bar{q}$ -- мезоны: π, ρ, . . .
  - ✓ Недавно открыты тетра- и пентакварки: $qq\bar{q}\bar{q}$, $qqqq\bar{q}$
  - ✓ Есть указания на существование глюболов -- связанных состояний глюонов

Объяснение конфайнмента -- задача тысячелетия!!!

Премия Математического института Клэя

Как вычислить $Z[j]$?

Режим сильной связи. Пути

- Симметрии $+$ аналитические свойства наблюдаемых ➪ позволяет связать некоторые наблюдаемые
- Использование других параметров разложения -- разложение по обратному числу цветов $1/(N=3)$
- Поиск дуальных теорий:

$$\text{теория}(\lambda) = \text{теория}'\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

- ...
- Теория на решетке
  - ✓ позволяет получить некоторые аналитические результаты
  - ✓ численно изучать модель. Сегодня точность 10%. 30 лет назад -- 100%
  - ✓ Big Data?
  - ✓ квантовые вычисления?
  - ✓ ...

Заключение

- КТП -- мощнейшая парадигма/инструмент, позволяющая единым образом описать всю совокупность экспериментальных данных в области физики элементарных частиц
- В фундаменте Стандартной модели заложена КТП. СМ с поразительной точностью описывает все имеющиеся экспериментальные данные
- Методы и подходы КТП используются в статистической физике, в физике твердого тела и конденсированных состояний и во многих других областях

Проблемы

- Проблема придания физического смысла теориям с $[\lambda] < 0$ ➪ проблема построения квантовой гравитации ➪ проблема построения Теории Великого Объединения
- Проблема анализа теорий с сильной связью $\lambda > 1$

NB: Слабость матаппарата

Возможно, нужна смена парадигмы!