

Генерация высших гармоник в нелинейной электродинамике

Копчинский Илья Дмитриевич
209-я группа

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Пётр Сергеевич Сатунин

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

19 мая 2020

Отправная точка

Лагранжиан Эйлера-Гейзенберга (1936):

$$L = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \varkappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right).$$

Используемые обозначения:

$$f = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - c^2B^2), \quad g = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, c\mathbf{B}),$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

$$\varkappa = \frac{2\alpha_e^2\hbar^3}{45m_e^4c^5} \approx 1.66 \cdot 10^{-30} \frac{\text{М} \cdot \text{с}^2}{\text{КГ}}.$$

Отправная точка

Лагранжиан Эйлера-Гейзенберга (1936):

$$L = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \varkappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right).$$

Используемые обозначения:

$$f = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - c^2B^2), \quad g = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E}, c\mathbf{B}),$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta},$$

$$\varkappa = \frac{2\alpha_e^2\hbar^3}{45m_e^4c^5} \approx 1.66 \cdot 10^{-30} \frac{\text{М} \cdot \text{с}^2}{\text{КГ}}.$$

В естественной системе единиц + обобщение:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2.$$

Уравнения с поправками

Одна пара уравнений Максвелла с поправками:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2,$$

Уравнения с поправками

Одна пара уравнений Максвелла с поправками:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2,$$

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

Уравнения с поправками

Одна пара уравнений Максвелла с поправками:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2,$$

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 8\alpha f F^{\mu\nu} - 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Уравнения с поправками

Одна пара уравнений Максвелла с поправками:

$$L = -\frac{1}{4}f + \alpha f^2 + \beta g^2,$$

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 8\alpha f F^{\mu\nu} - 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Другая пара уравнений Максвелла без поправок:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0.$$

Уравнения с поправками

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P} = 16 [\alpha (E^2 - H^2) \mathbf{E} + 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mathbf{H}],$$

$$\mathbf{M} = 16 [\alpha (E^2 - H^2) \mathbf{H} - 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mathbf{E}].$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Уравнения с поправками

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P} = 16 [\alpha (E^2 - H^2) \mathbf{E} + 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mathbf{H}],$$

$$\mathbf{M} = 16 [\alpha (E^2 - H^2) \mathbf{H} - 2\beta(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \mathbf{E}].$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Волновые уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{M} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{P} - \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{P} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}.$$

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

- Эксперимент в резонаторе с добротностью $Q \sim 10^{11}$.

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

- Эксперимент в резонаторе с добротностью $Q \sim 10^{11}$.
- Детектор с коэффициентом усиления 10^8 (микропиксельный лавинный фотодиод — МЛФД / MAPD).

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

- Эксперимент в резонаторе с добротностью $Q \sim 10^{11}$.
- Детектор с коэффициентом усиления 10^8 (микрорексельный лавинный фотодиод — МЛФД / MAPD).
- Поправки \simeq шумы.

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$

$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

- Эксперимент в резонаторе с добротностью $Q \sim 10^{11}$.
- Детектор с коэффициентом усиления 10^8 (микрорексельный лавинный фотодиод — МЛФД / MAPD).
- Поправки \simeq шумы.
- Но можно попробовать:
 - ① максимально усилить сигнал (без усиления мод накачки),

Возможности регистрации поправок

- Малый эффект:

$$L = L_0 + L_{EH} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 f + \kappa\varepsilon_0^2 \left(f^2 + \frac{7}{4}g^2 \right),$$
$$\frac{L_{EH}}{L_0} \sim \kappa\varepsilon_0 (cB_0)^2 \sim 10^{-26}.$$

- Эксперимент в резонаторе с добротностью $Q \sim 10^{11}$.
- Детектор с коэффициентом усиления 10^8 (микрорексельный лавинный фотодиод — МЛФД / MAPD).
- Поправки \simeq шумы.
- Но можно попробовать:
 - 1 максимально усилить сигнал (без усиления мод накачки),
 - 2 разнести сигнальные моды и моды накачки по частоте.

Цель 1. Усиление сигнала

Рассмотрим моды отдельно друг от друга:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) E^{sig} = rhs(E^{total}) = rhs(E^{pump} + E^{sig}) \simeq rhs(E^{pump}).$$

В простейшем случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E^{sig} = A \sin(\omega x) \cos(\omega t)$$

Цель 1. Усиление сигнала

Рассмотрим моды отдельно друг от друга:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) E^{sig} = rhs(E^{total}) = rhs(E^{pump} + E^{sig}) \simeq rhs(E^{pump}).$$

В простейшем случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E^{sig} = A \sin(\omega x) \cos(\omega t)$$

рождается сигнальная мода

$$E^{sig} = \frac{A}{2\omega} t \cdot \sin(\omega x) \sin(\omega t)$$

с нарастающей амплитудой,

Цель 1. Усиление сигнала

Рассмотрим моды отдельно друг от друга:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) E^{sig} = rhs(E^{total}) = rhs(E^{pump} + E^{sig}) \simeq rhs(E^{pump}).$$

В простейшем случае

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E^{sig} = A \sin(\omega x) \cos(\omega t)$$

рождается сигнальная мода

$$E^{sig} = \frac{A}{2\omega} t \cdot \sin(\omega x) \sin(\omega t)$$

с нарастающей амплитудой, ограниченной диссипациями

$$E^{sig} \sim \frac{A}{2\omega} \cdot t e^{-\delta t}, \quad \max E^{sig} \sim A \cdot \frac{Q}{\omega^2}.$$

Цель 1. Усиление сигнала

Трёхмерная конфигурация мод накачки,

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_z &= +E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \sin(\omega t), \\ E_y &= 0, & B_x &= +B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \\ B_z &= 0, & B_y &= -B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \end{aligned} \quad \begin{aligned} E_0 &= \sqrt{2}cB_0, \\ a &= \sqrt{2}c\frac{\pi}{\omega}, \end{aligned}$$

Цель 1. Усиление сигнала

Трёхмерная конфигурация мод накачки,

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_z &= +E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \sin(\omega t), \\ E_y &= 0, & B_x &= +B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \\ B_z &= 0, & B_y &= -B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \end{aligned} \quad \begin{aligned} E_0 &= \sqrt{2}cB_0, \\ a &= \sqrt{2}c\frac{\pi}{\omega}, \end{aligned}$$

линейно входящих в правые части волновых уравнений,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) E_z^{sig} = -24\epsilon_0 \kappa \cdot B_0^2 \omega^2 \cdot \underline{E_z} + \dots$$

Цель 1. Усиление сигнала

Трёхмерная конфигурация мод накачки,

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_z &= +E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \sin(\omega t), \\ E_y &= 0, & B_x &= +B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \\ E_z &= 0, & B_y &= -B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cdot \cos(\omega t), \end{aligned} \quad \begin{aligned} E_0 &= \sqrt{2}cB_0, \\ a &= \sqrt{2}c\frac{\pi}{\omega}, \end{aligned}$$

линейно входящих в правые части волновых уравнений,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) E_z^{sig} = -24\varepsilon_0\kappa \cdot B_0^2 \omega^2 \cdot \underline{E_z} + \dots$$

способствует их регистрации

$$\frac{E_z^{sig}}{E_z} \sim c^2 \cdot \varepsilon_0 \kappa B_0^2 \omega^2 \cdot \frac{Q}{\omega^2} \sim \frac{\kappa}{\mu_0} B_0^2 Q \sim 10^{-15} \quad (\ll 1 \text{ по-прежнему}).$$

Цель 2. Высшие частоты

Неудачные попытки.

- Найти моду на утроенной частоте (поправки $\sim E^3, H^3$):

$$\square E^{sig} = A \cdot \sin(3\omega x) \cos(3\omega t)?$$

Цель 2. Высшие частоты

Неудачные попытки.

- Найти моду на утроенной частоте (поправки $\sim E^3, H^3$):

$$\square E^{sig} = A \cdot [\sin(\omega x) \cos(3\omega t) + \sin(3\omega x) \cos(\omega t)].$$

Цель 2. Высшие частоты

Неудачные попытки.

- Найти моду на утроенной частоте (поправки $\sim E^3, H^3$):

$$\square E^{sig} = A \cdot [\sin(\omega x) \cos(3\omega t) + \sin(3\omega x) \cos(\omega t)].$$

- Найти моды $2\omega_1 \pm \omega_2$ или $2\omega_2 \pm \omega_1$ (при суперпозиции мод накачки разных частот ω_1 и ω_2):

$$\square E^{sig} = A \cdot \sin[(2\omega_1 + \omega_2)(x + t)]?$$

Цель 2. Высшие частоты

Неудачные попытки.

- Найти моду на утроенной частоте (поправки $\sim E^3, H^3$):

$$\square E^{sig} = A \cdot [\sin(\omega x) \cos(3\omega t) + \sin(3\omega x) \cos(\omega t)].$$

- Найти моды $2\omega_1 \pm \omega_2$ или $2\omega_2 \pm \omega_1$ (при суперпозиции мод накачки разных частот ω_1 и ω_2):

$$\square E^{sig} = A \cdot \sin[(2\omega_1 + \omega_2)x + (2\omega_1 - \omega_2)t].$$

Цель 2. Высшие частоты

Неудачные попытки.

- Найти моду на утроенной частоте (поправки $\sim E^3, H^3$):

$$\square E^{sig} = A \cdot [\sin(\omega x) \cos(3\omega t) + \sin(3\omega x) \cos(\omega t)].$$

- Найти моды $2\omega_1 \pm \omega_2$ или $2\omega_2 \pm \omega_1$ (при суперпозиции мод накачки разных частот ω_1 и ω_2):

$$\square E^{sig} = A \cdot \sin[(2\omega_1 + \omega_2)x + (2\omega_1 - \omega_2)t].$$

Требуется более универсальный подход.

Цель 2. Высшие частоты

Начально-краевая задача

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) u(M, t) = f(M, t) \quad \forall M = (x, y, z) \in T, \quad t > 0,$$

$$\forall M \in S, \quad t > 0 \quad \begin{cases} u(M, t) = 0 & \text{для электрического поля,} \\ \frac{\partial}{\partial n} u(M, t) = 0 & \text{для магнитного поля,} \end{cases}$$

$$u(M, 0) = 0 \quad \forall M \in T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0 \quad \forall M \in T.$$

Цель 2. Высшие частоты

Начально-краевая задача

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_M \right) u(M, t) = f(M, t) \quad \forall M = (x, y, z) \in T, \quad t > 0,$$

$$\forall M \in S, \quad t > 0 \quad \begin{cases} u(M, t) = 0 & \text{для электрического поля,} \\ \frac{\partial}{\partial n} u(M, t) = 0 & \text{для магнитного поля,} \end{cases}$$

$$u(M, 0) = 0 \quad \forall M \in T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0 \quad \forall M \in T.$$

решается методом функции Грина:

$$u(M, t) = \int_0^t \int_T G(M, Q, t - \tau) f(Q, \tau) dV d\tau,$$

Цель 2. Высшие частоты

Явный вид электрической компоненты E^{sig} в параллелепипеде:

$$u(x, y, z, t) = \frac{8}{a_1 a_2 a_3} \int_0^t \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} f(x', y', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk} c} (t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk} c}} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\pi n x}{a_1} \sin \frac{\pi n x'}{a_1} \cdot \sin \frac{\pi m y}{a_2} \sin \frac{\pi m y'}{a_2} \cdot \sin \frac{\pi k z}{a_3} \sin \frac{\pi k z'}{a_3} \right] dx' dy' dz' d\tau.$$

Цель 2. Высшие частоты

Явный вид электрической компоненты E^{sig} в параллелепипеде:

$$u(x, y, z, t) = \frac{8}{a_1 a_2 a_3} \int_0^t \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \int_0^{a_3} f(x', y', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c (t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\pi n x}{a_1} \sin \frac{\pi n x'}{a_1} \cdot \sin \frac{\pi m y}{a_2} \sin \frac{\pi m y'}{a_2} \cdot \sin \frac{\pi k z}{a_3} \sin \frac{\pi k z'}{a_3} \right] dx' dy' dz' d\tau.$$

Явный вид электрической компоненты E^{sig} в цилиндре:

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \frac{4}{\pi r_0^2 h} \int_0^t \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h f(\rho', \varphi', z', \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}} c (t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}} c \cdot J_m'^2(\chi_n^{(m)})} \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos[m(\varphi - \varphi')]}{1 + \delta_{m0}} \cdot J_m \left(\chi_n^{(m)} \frac{\rho'}{r_0} \right) J_m \left(\chi_n^{(m)} \frac{\rho}{r_0} \right) \cdot \sin \frac{\pi k z}{h} \sin \frac{\pi k z'}{h} \right] d\rho' d\varphi' dz' d\tau.$$

Прямое моделирование (разностная схема)

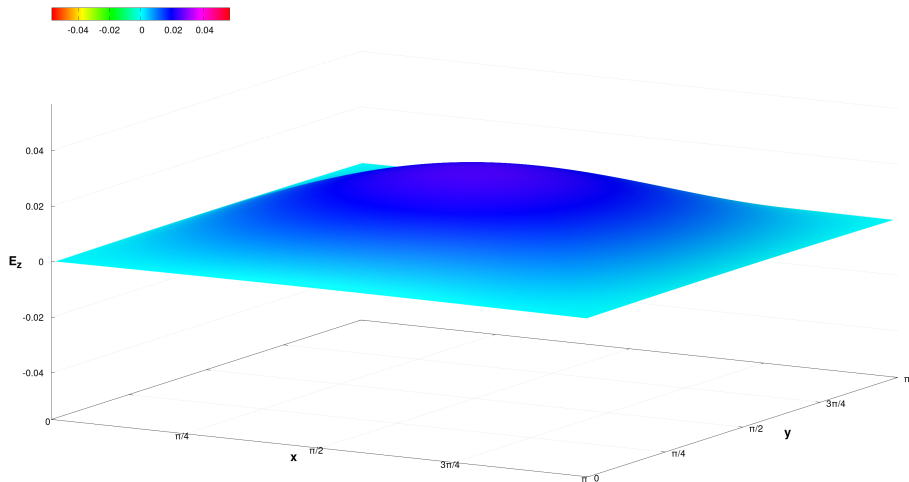


Рис.: Электрическое поле в срезе резонатора (модель без учёта поправок).

Прямое моделирование (разностная схема)

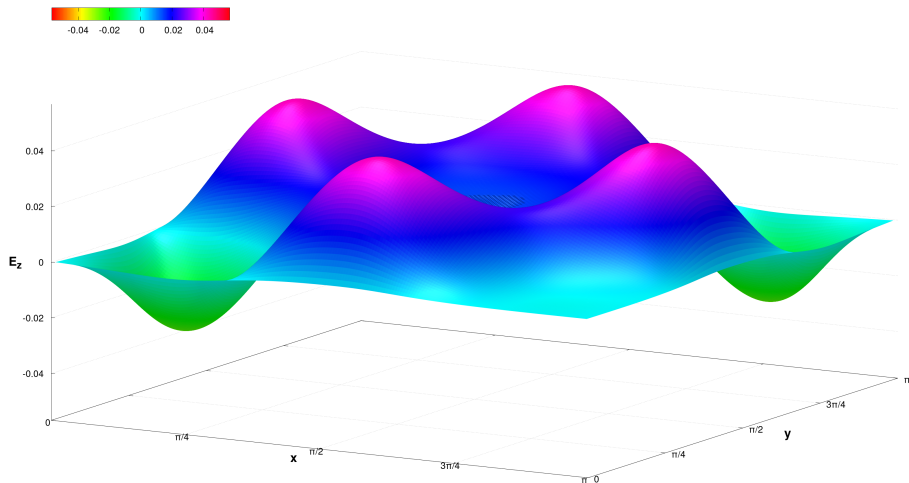


Рис.: Электрическое поле в срезе резонатора (модель с учётом поправок).

Прямое моделирование (разностная схема)

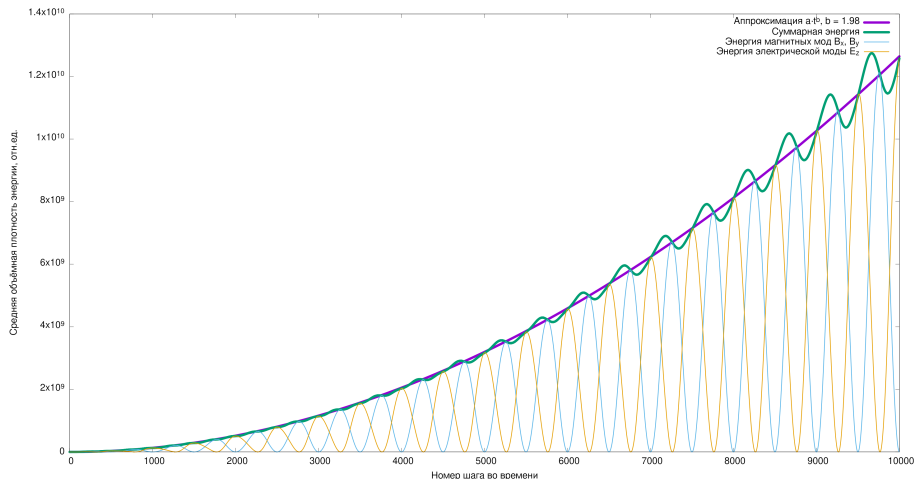


Рис.: Квадратичное ($t^{1.98}$) нарастание энергии сигнальных мод.

Прямое моделирование (разностная схема)

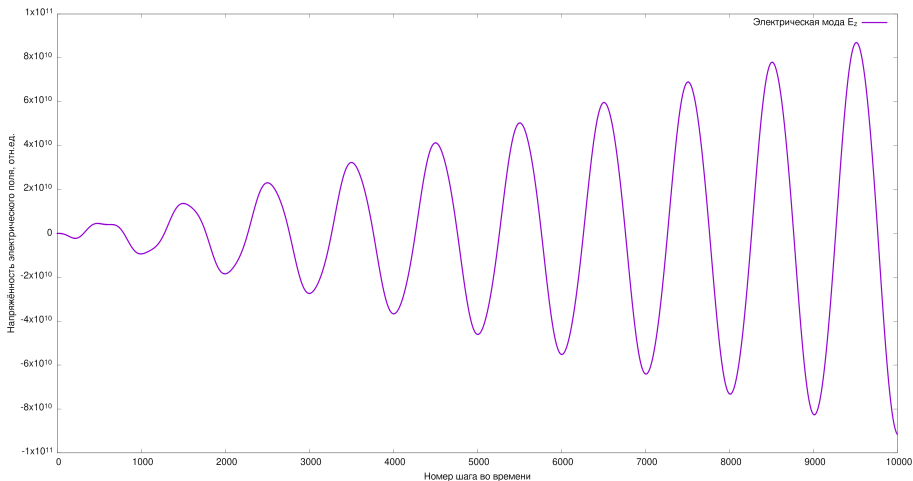


Рис.: Электрическая мода в узловой точке.

Прямое моделирование (разностная схема)

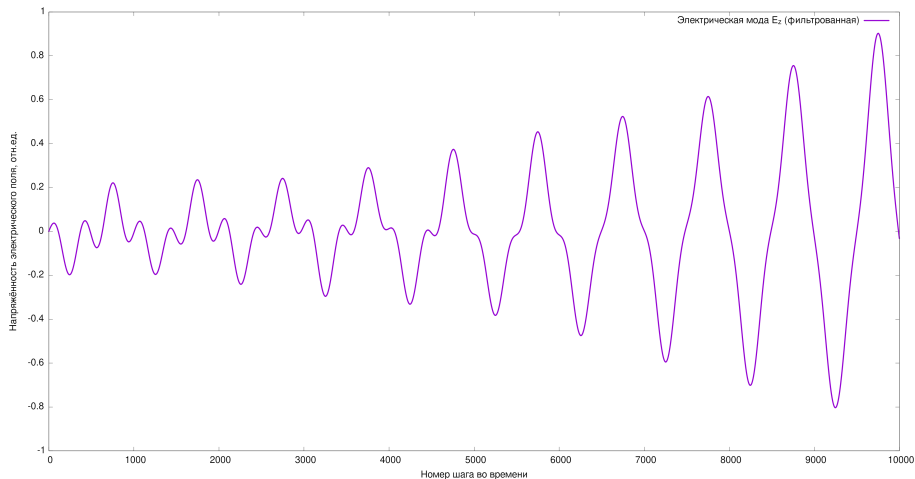


Рис.: Электрическая мода после фильтрации.

Прямое моделирование (разностная схема)

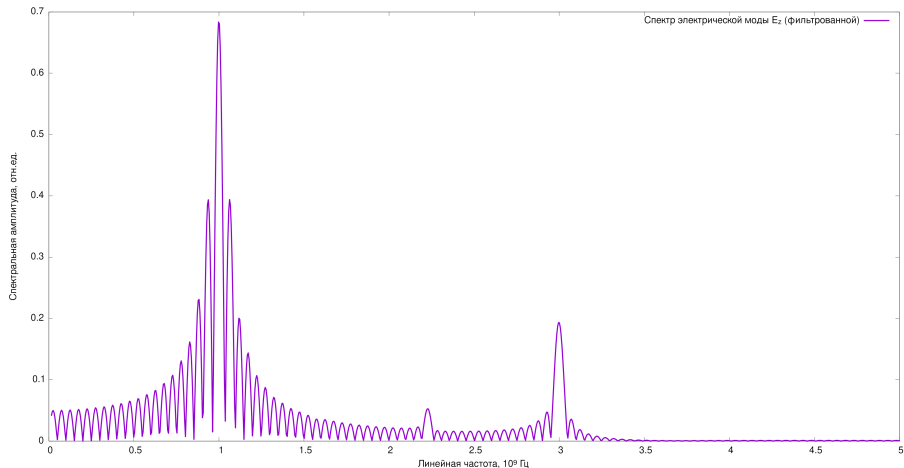


Рис.: Спектр фильтрованной электрической моды.

Расчёт через функцию Грина

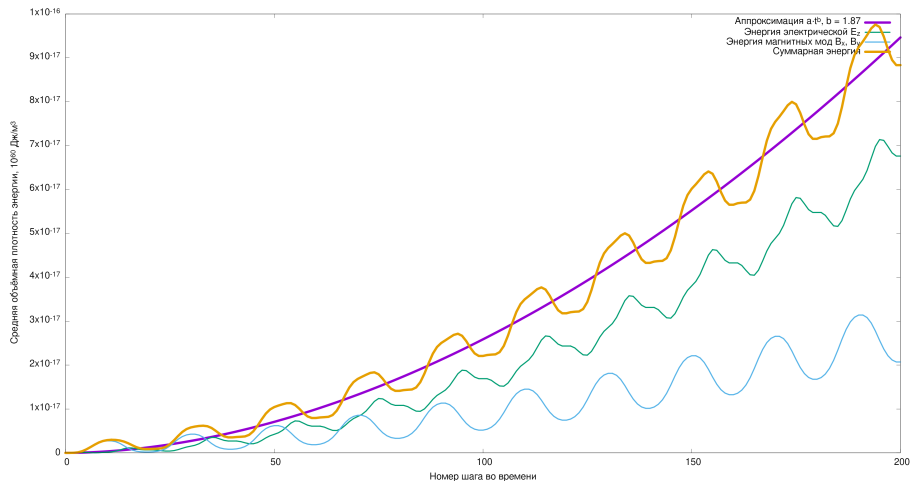


Рис.: Почти квадратичное нарастание энергии сигнальных мод.

Основные итоги

В теоретической части работы:

- вывод уравнений Максвелла с поправками
- вывод волновых уравнений с поправками
- рассмотрение резонансного нарастания мод
- применение метода функции Грина в простейших резонаторах

Основные итоги

В теоретической части работы:

- вывод уравнений Максвелла с поправками
- вывод волновых уравнений с поправками
- рассмотрение резонансного нарастания мод
- применение метода функции Грина в простейших резонаторах

В практической части работы:

- построение разностной схемы в параллелепипеде
- создание наглядной анимации нелинейного поведения
- подтверждение резонансного нарастания сигнальных мод
- **обнаружение утроенной частоты** в спектре электрической составляющей
- расчёт решений через функцию Грина в параллелепипеде

Дальнейшее развитие

- Разработка консервативной разностной схемы — надёжное моделирование.

Дальнейшее развитие

- Разработка консервативной разностной схемы — надёжное моделирование.
- Реализация метода конечных элементов.

Дальнейшее развитие

- Разработка консервативной разностной схемы — надёжное моделирование.
- Реализация метода конечных элементов.
- Расчёт сигнальных мод в цилиндре.

Дальнейшее развитие

- Разработка консервативной разностной схемы — надёжное моделирование.
- Реализация метода конечных элементов.
- Расчёт сигнальных мод в цилиндре.
- Расчёт сигнальных мод при других модах накачки.

Дальнейшее развитие

- Разработка консервативной разностной схемы — надёжное моделирование.
- Реализация метода конечных элементов.
- Расчёт сигнальных мод в цилиндре.
- Расчёт сигнальных мод при других модах накачки.
- Модели экспериментов для $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{4}$ и не только: вклад аксионов и аксионоподобных частиц.

Спасибо за внимание.

Вывод поправок

$$\delta S = \int \left(-\frac{1}{4} \delta f + 2\alpha f \delta f + 2\beta g \delta g \right) d\Omega =$$

Вывод поправок

$$\delta S = \int \left(-\frac{1}{4} \delta f + 2\alpha f \delta f + 2\beta g \delta g \right) d\Omega =$$

$$(\delta f = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad \delta g = 4\tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad d\Omega = dx^\mu dS_\mu)$$

Вывод поправок

$$\delta S = \int \left(-\frac{1}{4} \delta f + 2\alpha f \delta f + 2\beta g \delta g \right) d\Omega =$$

$$(\delta f = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad \delta g = 4\tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad d\Omega = dx^\mu dS_\mu)$$

$$= \iint \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} dx^\mu dS_\mu =$$

Вывод поправок

$$\delta S = \int \left(-\frac{1}{4} \delta f + 2\alpha f \delta f + 2\beta g \delta g \right) d\Omega =$$

$$(\delta f = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad \delta g = 4\tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad d\Omega = dx^\mu dS_\mu)$$

$$= \iiint \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} dx^\mu dS_\mu =$$

$$= \int \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \Big|_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} dS_\mu -$$

$$- \iiint \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu dx^\mu dS_\mu.$$

Вывод поправок

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(-\frac{1}{4}\delta f + 2\alpha f\delta f + 2\beta g\delta g \right) d\Omega = \\ (\delta f &= 4F^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu, \quad \delta g = 4\tilde{F}^{\mu\nu}\partial_\mu\delta A_\nu, \quad d\Omega = dx^\mu dS_\mu) \\ &= \iint \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} dx^\mu dS_\mu = \\ &= \int \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \Big|_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} dS_\mu - \\ &- \iint \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha fF^{\mu\nu} + 8\beta g\tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu dx^\mu dS_\mu.\end{aligned}$$

Вывод поправок

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

Вывод поправок

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

$$\forall \delta A_\nu \quad \delta S \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

Вывод поправок

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

$$\forall \delta A_\nu \quad \delta S \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 8\alpha f F^{\mu\nu} - 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Вывод поправок

$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu d\Omega,$$

$$\forall \delta A_\nu \quad \delta S \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 8\alpha f F^{\mu\nu} - 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & +H_y \\ E_y & +H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & +H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}.$$

Функция Грина

Представление функции Грина

$$G(M, Q, t - \tau) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}c}(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}c}} \cdot v_{nmk}(Q) \cdot v_{nmk}(M) \right]$$

Функция Грина

Представление функции Грина

$$G(M, Q, t - \tau) = \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_{nmk}c}(t - \tau)}{\sqrt{\lambda_{nmk}c}} \cdot v_{nmk}(Q) \cdot v_{nmk}(M) \right]$$

включает собственные функции v_{nmk} и собственные значения λ_{nmk} , определяемые при решении задачи Штурма-Лиувилля в области T :

$$\Delta v(M) + \lambda \cdot v(M) = 0 \quad \forall M \in T,$$
$$\forall M \in S \quad \begin{cases} v(M) = 0, & \text{(для электрического поля)} \\ \frac{\partial}{\partial n} v(M) = 0. & \text{(для магнитного поля)} \end{cases}$$

Явная трёхслойная разностная схема

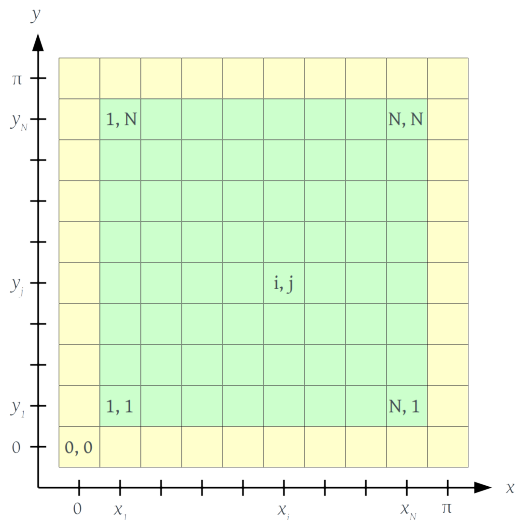


Рис.: Сетка для представления функций

Явная трёхслойная разностная схема

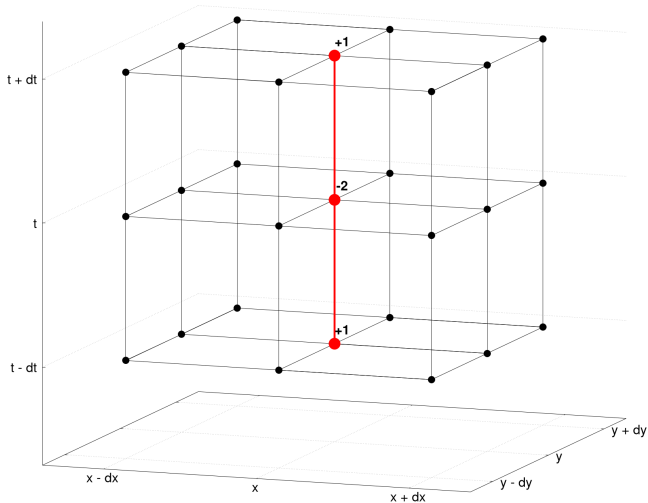


Рис.: Шаблон второй производной по времени

Явная трёхслойная разностная схема

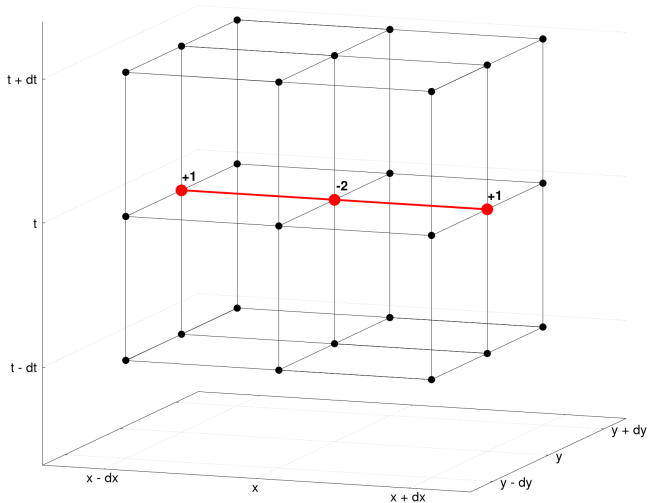


Рис.: Шаблон второй производной по x

Явная трёхслойная разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{A(\hat{t}) + A(\check{t}) - 2A(t)}{\tau^2} &= \frac{1}{\tau^2} \left(A(t) + \frac{\partial A}{\partial t}(t) \cdot \tau + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t) \cdot \frac{\tau^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}(t) \cdot \frac{\tau^3}{3} + A(t) - \frac{\partial A}{\partial t}(t) \cdot \tau + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t) \cdot \frac{\tau^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}(t) \cdot \frac{\tau^3}{3} - 2A(t) + O(\tau^4) \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t) + O(\tau^2) =: \Delta_{\tau\tau}^2 A, \end{aligned}$$

$$\frac{A(\hat{x}) + A(\check{x}) - 2A(x)}{h_x^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(t) + O(h_x^2) =: \Delta_{xx}^2 A,$$

$$\frac{A(\hat{y}) + A(\check{y}) - 2A(y)}{h_y^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(t) + O(h_y^2) =: \Delta_{yy}^2 A.$$

Явная трёхслойная разностная схема

$$\left(\frac{1}{c^2} \Delta_{\tau\tau}^2 - \Delta_{xx}^2 - \Delta_{yy}^2 \right) A = f(x, y, t),$$

$$\begin{aligned} A(\hat{t}) = 2 & \left[1 - \left(\frac{c\tau}{h_x} \right)^2 - \left(\frac{c\tau}{h_y} \right)^2 \right] \cdot A(t) - A(\check{t}) + (c\tau)^2 f(x, y, t) + \\ & + \left(\frac{c\tau}{h_x} \right)^2 \cdot [A(\hat{x}) + A(\check{x})] + \left(\frac{c\tau}{h_y} \right)^2 \cdot [A(\hat{y}) + A(\check{y})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{t} &:= t + \tau, & \hat{x} &:= x + h_x, & \hat{y} &:= y + h_y, \\ \check{t} &:= t - \tau, & \check{x} &:= x - h_x, & \check{y} &:= y - h_y. \end{aligned}$$